

1. 집합 $A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$ 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $1 \in A$ ② $\{1, 2\} \in A$ ③ $\{1\} \subset A$
④ $\{1, 2\} \subset A$ ⑤ $\{2\} \in A$

해설

- ① 1은 집합 A 의 원소이므로 (참)
② $\{1, 2\}$ 는 집합 A 의 원소이므로 (참)
③ 1이 집합 A 의 원소이므로 $\{1\}$ 은 A 의 부분 집합이다.(참)
④ 1, 2가 집합 A 의 원소이므로 $\{1, 2\}$ 는 집합 A 의 부분집합이다.(참)
⑤ $\{2\}$ 는 A 의 원소가 아니므로 $\{2\} \notin A$ 이고 $\{2\} \subset A$ 이다.(거짓)

2. 집합 $A = \{x, y\}$ 의 부분집합의 개수는?

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$A = \{x, y\}$ 이므로 A 의 부분집합의 개수는 원소의 개수만큼 2를 곱한 값과 같다.
따라서 $2^2 = 2 \times 2 = 4$ (개) 이다.

3. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 부분집합 $A = \{2, 3, 5\}$ 에 대하여 A^c 은?

- ① $\{2, 3, 5\}$
- ② $\{1, 3, 5\}$
- ③ $\{1, 4, 6\}$
- ④ $\{4, 5, 6\}$
- ⑤ $\{1, 2, 3\}$

해설

$$A^c = \{1, 4, 6\}$$

4. $x \geq 0, y \geq 0$ 이고 $x + 3y = 8$ 일 때, $\sqrt{x} + \sqrt{3y}$ 의 최댓값은?

- ① 2 ② 3 ③ $\sqrt{10}$ ④ $\sqrt{15}$ ⑤ 4

해설

x, y 가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
 $(\sqrt{x} + \sqrt{3y})^2 \leq (1^2 + 1^2)(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{3y})^2$
 $= 2(x + 3y)$
 $= 16$ (단, 등호는 $x = 3y$ 일 때 성립)
그런데 $\sqrt{x} + \sqrt{3y} \geq 0$ 이므로
 $0 \leq \sqrt{x} + \sqrt{3y} \leq 4$
따라서 $\sqrt{x} + \sqrt{3y}$ 의 최댓값은 4이다.

5. 4의 배수의 집합을 A 라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $3 \in A$

② $4 \notin A$

③ $8 \in A$

④ $10 \in A$

⑤ $12 \notin A$

해설

집합 A 를 원소나열법으로 나타내면 $A = \{4, 8, 12, \dots\}$ 이다.
따라서 $8 \in A$

6. 두 집합 $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, c, e, f\}$ 에 대하여 $(A \cap B) \subset X \subset (A \cup B)$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

- ① 8 개 ② 10 개 ③ 12 개 ④ 14개 ⑤ 16 개

해설

$\{a, c\} \subset X \subset \{a, b, c, d, e, f\}$ 이므로
집합 X 는 $\{a, b, c, d, e, f\}$ 의 부분집합 중 a, c 를 원소로 갖는
집합이다.
따라서 집합 X 의 개수는 $2^4 = 16$ (개)이다.

7. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A) = 13$,
 $n(B) = 9$, $n(A \cap B) = 5$ 일 때, $n(A \cup B)$ 는?

① 15 ② 17 ③ 19 ④ 21 ⑤ 23

해설

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 13 + 9 - 5 = 17 \end{aligned}$$

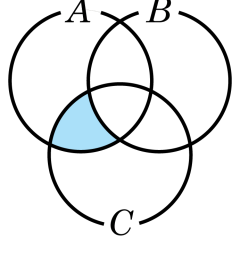
8. $A = \{1, 3, 5, 7, 8\}$, $B = \{1, 7, 8, 9\}$ 에 대하여 $A \cap X = X$, $(A - B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개 ④ 16 개 ⑤ 32 개

해설

$(A - B) \subset X \subset A$, 즉 $\{3, 5\} \subset X \subset \{1, 3, 5, 7, 8\}$ 이므로 집합 X 의 개수는 $2 \times 2 \times 2 = 8(\text{개})$ 이다.

9. 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은?



- ① $A \cup B \cup C$
- ② $C - (A \cup B)$
- ③ $(A \cup C) - B$
- ④ $(B \cup C) - A$
- ⑤ $(A \cap C) - B$

해설

①

②

③

④

10. 다음 중에서 참인 명제는? (단, 문자는 실수이다.)

- ① $x^2 = 1$ 이면 $x^3 = 1$ 이다.
- ② $\sqrt{(-3)^2} = -3$
- ③ $|x| > 0$ 이면 $x > 0$ 이다.
- ④ $|x + y| = |x - y|$ 이면 $xy = 0$ 이다.
- ⑤ 대각선의 길이가 같은 사각형은 직사각형이다.

해설

- ① $x = -1$ 이면 $x^2 = 1$ 이지만 $x^3 = -1$ 이므로 거짓인 명제이다.
- ② $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$ 이므로 거짓인 명제이다.
- ③ $x = -2$ 이면 $|-2| = 2 > 0$ 이지만 $-2 < 0$ 이므로 거짓인 명제이다.
- ④ $|x + y| = |x - y|$ 의 양변을 제곱하면 $(x + y)^2 = (x - y)^2$
 $\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2 \Leftrightarrow xy = 0$ 따라서, 참인 명제이다.
- ⑤ 등변사다리꼴은 대각선의 길이가 같지만 직사각형은 아니다. 따라서, 거짓인 명제이다.

11. 다음 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은?

-1, 2, -3, 4, ...

- ① $(-1)^{n+1} \times n$
- ② $n - (-1)^n$
- ③ $(-1)^n + n$
- ④ $(-1)^n \times n$
- ⑤ $\frac{1}{2} \{1 - (-1)^n\}$

해설

$a_1 = -1 \cdot 1$
 $a_2 = (-1)^2 \cdot 2$
 $a_3 = (-1)^3 \cdot 3$
 $a_4 = (-1)^4 \cdot 4$ 이므로
 $a_n = (-1)^n \cdot n$

12. 등차수열 2, 5, 8, 11, ...의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 구하면?

① $n(3n+2)$

② $\frac{1}{2}n(3n+1)$

③ $\frac{1}{3}n(n+3)$

④ $n(2n-1)$

⑤ $\frac{1}{2}n(n+1)$

해설

$a = 2$, $d = 5 - 2 = 3$ 이므로

$$S_n = \frac{n\{2a + (n-1) \cdot d\}}{2} \text{에 대입하면}$$

$$= \frac{n\{2 \cdot 2 + (n-1) \cdot 3\}}{2}$$

$$= \frac{n(4 + 3n - 2)}{2}$$

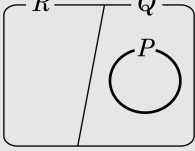
$$= \frac{n(3n + 1)}{2}$$

13. 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 하자. p 는 q 이기 위한 충분조건이고 $\sim r$ 는 q 이기 위한 필요충분조건일 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① $R \cap Q = R$
- ② $R \cup Q = R$
- ③ $P \cap Q = \emptyset$
- ④ $P \cup R = R$
- ⑤ $P \cap R = \emptyset$

해설

p 는 q 이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$
 $\sim r$ 는 q 이기 위한 필요충분조건이므로 $R^c = Q$
따라서, 세 집합의 포함 관계를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같으므로



$\therefore P \cap R = \emptyset$

14. 실수 a, b 에 대하여 $a^2 + b^2 \geq -ab$ 임을 증명한 것이다. $[가]$, $[나]$ 에 들어갈 알맞은 부등호로 짝지어진 것은?

$$\begin{aligned} A &= a^2 + b^2, \quad B = -ab \\ A - B &= a^2 + b^2 - (-ab) \\ &= a^2 + b^2 + ab \\ &= a^2 + ab + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + b^2 \\ &= \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0 \end{aligned}$$

따라서 $A - B \geq 0$ 이므로 $A \geq B$ 이다. 즉, $a^2 + b^2 \geq -ab$ (단 등호는 $a = b = c$ 일 때 성립)

- ① $>, \geq$
- ② $\geq, \geq$
- ③ $>, >$
- ④ $<, \geq$
- ⑤ $\leq, \leq$

해설

$$\begin{aligned} A &= a^2 + b^2, \quad B = -ab \\ A - B &= a^2 + b^2 - (-ab) \\ &= a^2 + b^2 + ab \\ &= a^2 + ab + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + b^2 \\ &= \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 \geq 0 \end{aligned}$$

(a, b 가 실수이므로)
 $\left(a + \frac{b}{2}\right)^2 \geq 0, \frac{3}{4}b^2 \geq 0$

따라서 $A - B \geq 0$ 이므로 $A \geq B$ 이다.
즉, $a^2 + b^2 \geq -ab$ (단 등호는 $a = b = c$ 일 때 성립)

15. 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공차가 각각 -2 , 3 일 때, 등차수열 $\{3a_n + 5b_n\}$ 의 공차는?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 9 ⑤ 15

해설

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항을 b 라고 할 때,

$$3a_n + 5b_n$$

$$= 3\{a + (n-1) \times (-2)\} + 5\{b + (n-1) \times 3\}$$

$$= 3a - 6(n-1) + 5b + 15(n-1)$$

$$= 3a + 5b + 9(n-1)$$

따라서 수열 $\{3a_n + 5b_n\}$ 은 첫째항이 $3a + 5b$ 이고, 공차가 9인 등차수열이다.

16. 공비가 $-\sqrt{6}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = -20$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_8$ 의 값은?

① -740 ② -720 ③ -700 ④ -680 ⑤ -660

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 $-\sqrt{6}$ 인 등비수열이므로 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a + ar + ar^2 + ar^3 = -20$$

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = ar^4 + ar^5 + ar^6 + ar^7$$

$$= r^4(a + ar + ar^2 + ar^3)$$

$$= 36 \cdot (-20) = 720$$

$$\text{따라서 } a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_8 = -20 + (-720) = -740$$

17. $\sum_{k=1}^{49} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = a\sqrt{2} + b$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{49} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{49} \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})} \\ &= \sum_{k=1}^{49} (\sqrt{k} - \sqrt{k+1}) \\ &= -\{(\sqrt{1} - \sqrt{2}) + (\sqrt{2} - \sqrt{3}) + \cdots\} \\ &\quad + \{(\sqrt{49} - \sqrt{50})\} \\ &= -(1 - \sqrt{50}) = 5\sqrt{2} - 1 \\ &\text{따라서, } a = 5, b = -1 \text{ 에서 } a + b = 4 \end{aligned}$$

18. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_{10} = 2^{50}$, $a_{n+1} = 2^n a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 일 때, 이 수열의 첫째항은?

① 32 ② 64 ③ 128 ④ 256 ⑤ 512

해설

$a_{n+1} = 2^n a_n$ 에서 n 대신에 $1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례로 대입하면

$$a_2 = 2^1 a_1$$

$$a_3 = 2^2 a_2$$

$$a_4 = 2^3 a_3$$

$\vdots$

$$a_n = 2^{n-1} a_{n-1}$$

이 등식들을 변끼리 곱하면

$$a_n = 2^1 \cdot 2^2 \cdots 2^3 \cdots 2^{n-1} \cdot a_1$$

$$\therefore a_n = 2^{1+2+3+\cdots+(n-1)} \cdot a_1 = a_1 \cdot 2^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

$$a_{10} = 2^{50} \text{ 이므로 } 2^{50} = a_1 \cdot 2^{45}$$

$$a_1 = 2^5 = 32$$

19. 두 집합 A, B 에 대하여 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

- $\supsetneq$

$n(A) < n(B)$ 이면 $A \subset B$ 이다.
- $\subseteq$

$A = B$ 이면 $n(A) = n(B)$ 이다.
- $\supseteq$

$n(A) = n(B)$ 이면 $A = B$ 이다.

- ①

$\supsetneq$
- ②

$\subseteq$
- ③

$\supseteq$
- ④

$\subseteq, \supseteq$
- ⑤

$\supsetneq, \subseteq, \supseteq$

해설

$\supsetneq$ $A = \{a, b\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ 라고 하면 $n(A) < n(B)$ 이지만 $A \not\subset B$ 이다.

$\supseteq$ $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ 라고 하면 $n(A) = n(B)$ 이지만 $A \neq B$ 이다.

20. A, B, C 세 사람이 각각 빨강, 파랑, 검정색의 모자를 쓰고 있다. 이 세 사람 중 A 는 항상 참만을 말하고 C 는 항상 거짓만을 말한다고 한다. 이 세 사람이 다음과 같이 말했다.

- ㉠

빨강 모자를 쓴 사람 : 검정 모자를 쓴 사람은 C 이다.
- ㉡

검정 모자를 쓴 사람 : 자신이 B 이다.
- ㉢

파랑 모자를 쓴 사람 : 검정 모자를 쓴 사람은 A 이다.

위의 진술로부터 이끌어 낼 수 있는 사실이 아닌 것은?

- ①

검정 모자를 쓴 사람은 C 이다.
- ②

빨강 모자를 쓴 사람은 A 이다.
- ③

파랑 모자를 쓴 사람은 참말을 했다.
- ④

파랑 모자를 쓴 사람은 C 가 아니다.
- ⑤

검정 모자를 쓴 사람은 A 가 아니다.

해설

세 진술은 검정 모자를 쓴 사람을 모두 다르게 말했으므로 어느 하나만 참이다. A 는 항상 참만을 말하므로 참말은 A 가 했고, B, C 는 거짓말을 했다. 만약 A 가 검정 모자를 썼다면 ㉢의 말, 즉 파랑 모자를 쓴 사람이 참말을 했으므로 모순이다. 만일 B 가 검정 모자를 썼다면 ㉡의 말, 즉 B 가 참말을 했으므로 모순이다. 따라서 C 가 검정 모자를 썼고, 그 말을 한 빨강 모자를 쓴 사람은 참말을 했으므로, A 는 빨강 모자를 썼다. 따라서 파랑 모자를 쓴 사람은 B 이다. 그러므로 파랑 모자를 쓴 사람, 즉 B 는 거짓말을 했다.

21. 자연수 k 에 대하여 수열 $2^3 + 1, 2^4 + 3, 2^5 + 5, \dots, 2^k + 19$ 의 합을 S 라 할 때, $S + k$ 의 값은?

① $2^{12} + 92$

② $2^{12} + 108$

③ $2^{13} + 92$

④ $2^{13} + 104$

⑤ $2^{13} + 128$

해설

수열 $1, 3, 5, 7, \dots$ 의 제 n 항은 $2n - 1$ 이므로

$$2n - 1 = 19, 2n = 20, \therefore n = 10$$

이때, $k = 12$ 이므로

$$S = (2^3 + 1) + (2^4 + 3) + (2^5 + 5) + \dots + (2^{12} + 19)$$

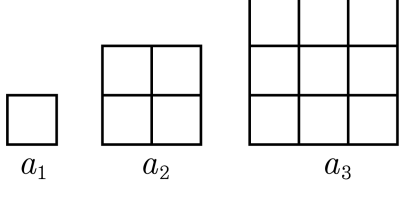
$$= (2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{12}) + (1 + 3 + 5 + \dots + 19)$$

$$= \frac{2^3(2^{10} - 1)}{2 - 1} + \frac{10(1 + 19)}{2}$$

$$= 2^{13} - 8 + 100 = 2^{13} + 92$$

$$\therefore S + k = 2^{13} + 92 + 12 = 2^{13} + 104$$

22. 그림과 같이 한 변의 길이가 n (n 은 자연수)인 정사각형의 가로, 세로를 n 등분하여 생긴 모든 정사각형의 개수를 a_n 이라 한다. 예를 들어, $a_1 = 1$, $a_2 = 5$, $a_3 = 14$ 이다. 이때, a_{10} 의 값은?



- ① 385 ② 395 ③ 405 ④ 415 ⑤ 425

해설

크기가 작은 정사각형부터 개수를 세어 규칙을 찾으면

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 2^2 + 1$$

$$a_3 = 3^2 + 2^2 + 1$$

⋮

$$a_n = n^2 + (n - 1)^2 + (n - 2)^2 + \cdots + 1^2$$

$$= \sum_{k=1}^n k^2$$

$$\therefore a_{10} = \sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 385$$