1. 집합 A, B가 전체집합 U의 부분집합일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $A \cup \varnothing = A$　　② $A \cup A^c = U$

③ $(A^c)^c = A$　　④ $\varnothing^c = U$

⑤ $A - B = A \cup B^c$

해설

$A - B = A - (A \cap B) = A \cap B^c$

2. 집합 $A = \{1, 2, 3, 5, 8\}$, $B = \{2, 5, 9, 10\}$, $C = \{2, 3, 5\}$ 일 때, $A \cap (B \cap C)$ 는?

① $\{2, 3\}$ ② $\{2, 5\}$ ③ $\{2, 3, 5\}$

④ $\{3, 5\}$ ⑤ $\{3, 5, 8\}$

해설

$B \cap C = \{2, 5\}$ 이고 A와의 교집합은 $\{2, 5\}$ 이다.

3. 두 집합 A, B에 대하여 $A \cap B = B$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $B \subset A$ ② $A \subset (A \cup B)$

③ $A \cup B = A$ ④ $(A \cap B) \cup B = A$

⑤ $(A \cap B) \subset (A \cup B)$

해설

$A \cap B = B$ 이면 $B \subset A$ 이다.

④ $A \cap B = B$ 이면 $(A \cap B) \cup B = B \cup B = B$ 이므로 옳지 않다.

4. 수열 $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}$, … 의 제 15항까지의 합은?

① $\sqrt{14}-1$　② $\sqrt{15}-1$　③ 3

④ $\sqrt{15}+1$　⑤ 5

해설

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{15}+\sqrt{16}}$$

$$=\sum_{k=1}^{15}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{}\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}$$

$$=-\sum_{k=1}^{15}(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})$$

$$=-\{(1-\sqrt{2})+(\sqrt{2}-\sqrt{3})+\cdots\}$$

$$-\{(\sqrt{15}-\sqrt{16})\}$$

$$=-(1-\sqrt{16})=\sqrt{16}-1=4-1=3$$

5. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$의 값은?

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{2}$　④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{5}{6}$

해설

$$(\text{준 식})=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{3}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}$$
$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)$$
$$=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

6. $a_1 = 4,\ a_{n+1} = a_n + 3 (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 a_{10}의 값은?

① 29 ② 31 ③ 33 ④ 35 ⑤ 37

해설

$a_1 = 4,\ a_{n+1} = a_n + 3$이므로
a_n은 초항이 4, 공차가 3인 등차수열
$\therefore a_n = 4 + (n-1) \cdot 3$
$= 4 + 3n - 3$
$= 3n + 1$
$\therefore a_{10} = 31$

7. 전체 집합 U의 세 부분 집합 A, B, C에 대하여 다음 < 보기> 중 항상 옳은 것을 바르게 고른 것은?

보기

㉠ $(A \cap B) \cup (A - B) = A$

㉡ $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = U$

㉢ $(A - B) - C = A \cap B^c \cap C^c$

㉣ $A \cap (A^c \cup B) = A \cup B$

① ㉠, ㉡ ② ㉡ ③ ㉡, ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉣

해설

㉠ $(A \cap B) \cup (A \cup B^c) = A \cap (B \cup B^c) = A \cap \cup = A$

㉡ $(A \cup B) \cap (A \cup B^c) = (A \cup B \cap A) \cup (A \cup B \cap B^c)$
$= A \cup A = A$

㉢ $(A - B) - C = (A \cap B^c) - C = A \cap B^c \cap C^c$

㉣ $A \cap (A^c \cup B) = (A \cap A^c) \cup (A \cap B) = A \cap B$

8. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(U)=15,\ n(B-A)=5,\ n(B)=8,\ n(A^c)=7$ 일 때, $n(A-B)$ 는?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$n(B)=8, n(B-A)=5$ 이므로
$n(A\cap B)=3$ 이다.
$n(A^c)=A$ 이므로
$n(A)=n(U)-n(A^c)=15-7=8$ 이다.
따라서 $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$
$=8-3=5$ 이다.

9. 두 조건 p, q를 만족하는 집합을 P, Q라 하자. 두 집합 P, Q가 $P \cup Q = P$를 만족할 때, 다음 명제 중 항상 참인 것은?

① $p \to q$　　② $\sim p \to \sim q$　　③ $\sim p \to q$

④ $\sim q \to \sim p$　　⑤ $p \to \sim p$

해설

$P \cup Q = P \Rightarrow Q \subset P \Rightarrow q \ \to \ p$ (참) $\Rightarrow \sim p \ \to \ \sim q$ (참)

10. 밑변의 길이와 높이의 길이의 곱이 8인 직각삼각형이 있다. 이 때 빗변의 길이의 최솟값과 그 때의 가로의 길이를 합한 값은?

① $2\sqrt{2}$ ② 4 ③ $4\sqrt{2}$ ④ 8 ⑤ $8\sqrt{2}$

해설

밑변의 길이를 x, 높이를 y라 하면
$xy = 8 \cdots$㉠
피타고라스의 정리에 의하여 빗변의 길이는 $\sqrt{x^2+y^2}$이다.
$x > 0,\ y > 0$이므로
산술평균과 기하평균에 의하여
$x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2 \cdot y^2} = 2xy = 16$
$\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{16} = 4$
단, 등호는 $x^2 = y^2$ 즉 $x = y$일 때 성립한다.
$x = y$를 ㉠에 대입하면 $x^2 = 8$
따라서 $x = 2\sqrt{2}$이다.
$4 \times 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

11. 100 이하의 자연수 중에서 3 으로 나누었을 때 나머지가 2 인 수의 합은?

① 1600 ② 1620 ③ 1650 ④ 1680 ⑤ 1700

해설

조건을 만족시키는 자연수를 작은 수부터 차례로 나열하면
2, 5, 8, $\cdots$, 98 이고 이것은 첫째항이 2, 공차가 3 인 등차수열을 이룬다.
이 등차수열을 $\{a_n\}$ 이라 할 때, 일반항 a_n 은
$a_n = 2 + (n-1) \times 3 = 3n - 1$
이때, 끝항 98 은 $3n - 1 = 98$ 에서 $n = 33$ 이므로 98 은 제 33 항이다.
따라서 구하는 합을 S 라 하면
$S = \dfrac{33(2+98)}{2} = 33 \cdot 50 = 1650$

12. 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 $S_n = 3 \cdot 2^n + k$로 나타내어지는 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열이 되기 위한 상수 k의 값은?

① 0 ② −1 ③ −2 ④ −3 ⑤ −4

해설

$n = 1$일 때, $a_1 = S_1 = (3 \cdot 2^1 + k)$

$n \geq 2$일 때,

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$= (3 \cdot 2^n + k) - (3 \cdot 2^{n-1} + k) = 3 \cdot 2^{n-1}(2-1) = 3 \cdot 2^{n-1} \cdots$㉠

따라서, $n \geq 2$일 때, 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열이 되려면

㉠이 $n = 1$일 때에도 성립해야 하므로

$3 = 6 + k \quad \therefore \ k = -3$

13. 수열 $2\cdot 3,\ 3\cdot 5,\ 4\cdot 7,\ 5\cdot 9,\ \cdots$ 의 제 n 항까지의 합은?

① $4n^2+15n+17$
② $n(4n^2+15n+17)$
③ $\dfrac{4n^2+15n+17}{3}$
④ $\dfrac{n(4n^2+15n+17)}{3}$
⑤ $\dfrac{n(4n^2+15n+17)}{6}$

해설

$a_k=(k+1)(2k+1)=2k^2+3k+1$ 이므로
$S_n=\sum_{k=1}^{n}(2k^2+3k+1)$
$=2\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$
$=2\cdot\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}+3\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}+n$
$=\dfrac{n(4n^2+15n+17)}{6}$

14. $1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+10}$ 의 값은?

① $\dfrac{9}{10}$ ② $\dfrac{11}{10}$ ③ $\dfrac{10}{11}$ ④ $\dfrac{20}{11}$ ⑤ $\dfrac{11}{20}$

해설

$$\frac{1}{1+2+\cdots+n}=\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n(n+1)}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}\frac{2}{k(k+1)}=2\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=2\left\{\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)\right\}$$

$$=2\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{20}{11}$$

15. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2^n (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에 대하여 일반항 a_n은?

① 2^{n-1} ② $2^{n-1} + n - 1$ ③ $2^n - 1$

④ $2^n + n - 2$ ⑤ $2^{n+1} - 3$

해설

$a_{n+1} = a_n + 2^n$의 양변에 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ (n-1)$을 대입하여 변끼리 더하면

$a_2 = a_1 + 2$

$a_3 = a_2 + 2^2$

$\vdots$

$+) \underline{a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}}$

$a_n = a_1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}$

$= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$

$= 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}$

$= \dfrac{2^n - 1}{2 - 1}$

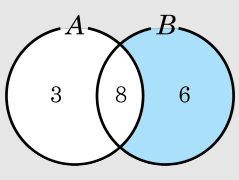
$= 2^n - 1$

16. 희진이네 반 학생 중 피자를 좋아하는 학생은 11 명, 떡을 좋아하는 학생은 14 명, 피자와 떡을 모두 좋아하는 학생은 8 명이다. 이때, 떡만 좋아하는 학생은 몇 명인가?

① 6 명 ② 8 명 ③ 10 명 ④ 12 명 ⑤ 14 명

해설

주어진 문제를 벤 다이어그램을 활용하여 해결할 수 있다. 벤 다이어그램의 각 영역에 해당하는 학생의 수를 기입하면 다음과 같다.



17. $x-1=0$이 $2x^2+ax-1=0$이기 위한 충분조건일 때 상수 a의 값을 구하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$x-1=0$이면 $2x^2+ax-1=0$이 참이므로

$x=1$을 대입하면 $2+a-1=0$

$\therefore a=-1$

18. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $3+5+\cdots+(2n+1)=n^2+2n$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. [㉠]에 알맞은 것은?

(i) $n=1$일 때,
(좌변)$=3$, (우변)$=1^2+2\cdot 1=3$이므로 등식이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때, 식이 성립한다고 가정하면
$3+5+\cdots+(2k+1)=k^2+2k\cdots\cdots$①이다.
①의 양변에 $2k+3$를 더하면
$3+5+\cdots+(2k+1)+(2k+3)=k^2+2k+(2k+3)=(k+1)^2+2(k+1)$
이므로 [㉠]일 때에도 성립한다.
따라서 (i), (ii)에 의해서 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

① $n=-k+1$ ② $n=-k+2$ ③ $n=k+1$
④ $n=k+2$ ⑤ $n=2k+1$

해설

㉠의 양변에 $2k+3$를 더하면
$3+5+\cdots+(2k+1)+(2k+3)$
$=k^2+2k+(2k+3)=(k+1)^2+2(k+1)$
이므로 $n=k+1$일 때에도 성립한다.
따라서 (i),(ii)에 의해서 주어진 등식은 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

19. 세 집합 A, B, C가 $A \cup B = C$, $B \cap C = C$ 를 만족할 때, 다음 중 두 집합 A, B 사이의 관계로 옳은 것은?

① $A \cap B = \varnothing$　② $A \cup B = \varnothing$　③ $A^c \cup B^c = \varnothing$

④ $B - A = \varnothing$　⑤ $A - B = \varnothing$

해설

$A \cup B = C$ 에서 $A \subset C$, $B \subset C \cdots$ ㉠

$B \cap C = C$ 에서 $C \subset B \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $B = C$

따라서 $A \subset C$, $B = C$ 이므로 $A \subset B$

$\therefore A - B = \varnothing$

20. 두 양수 a, b에 대하여 $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)$의 최솟값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

a, b는 양수이므로

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)=ab+4+1+\frac{4}{ab}$$

$$=5+ab+\frac{4}{ab}\geq 5+2\sqrt{ab\cdot\frac{4}{ab}}$$

$$=5+4=9$$

∴ 최솟값은 9

21. $a_1 = 2,\ a_{n+1} = 10a_n + 81 (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$이 있다. 이때, a_{10}의 각 자리의 수의 합은?

① 68 ② 70 ③ 72 ④ 74 ⑤ 76

해설

a_k의 각 자리의 수의 합을 b_k라 하면

$a_1 = 2 \quad \therefore\ b_1 = 2$

$a_2 = 10 \cdot 2 + 81 = 101 \quad \therefore\ b_2 = 1 + 0 + 1 = 2$

$a_3 = 10 \cdot 101 + 81 = 1091 \quad \therefore b_3 = b_2 + 9$

$a_4 = 10 \cdot 1091 + 81 = 10991 \quad \therefore\ b_4 = b_3 + 9 = b_2 + 9 \cdot 2$

$a_5 = 10 \cdot 10991 + 81 = 109991 \quad \therefore\ b_5 = b_4 + 9 = b_2 + 9 \cdot 3$

$\vdots$

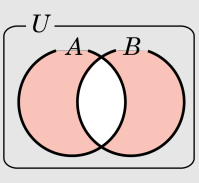
$\therefore\ b_{10} = b_2 + 9 \cdot 8 = 2 + 72 = 74$

22. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 연산 $A\triangle B = (A-B)\cup(B-A)$로 정의할 때, $(A\triangle B)\triangle B$ 와 같은 집합은?

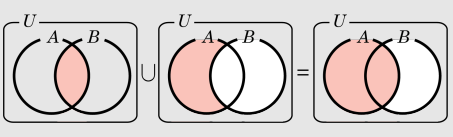
① U ② $\varnothing$ ③ A ④ B ⑤ $A\cap B$

해설

$A\triangle B = (A-B)\cup(B-A)$를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 $(A\triangle B)\triangle B = \{(A\triangle B)-B\}\cup\{B-(A\triangle B)\}$이므로 이를 벤 다이어그램으로 나타내면



$\therefore (A\triangle B)\triangle B = A$