

1. 다음 중 6의 배수의 집합의 부분집합이 아닌 것은?

- ① 12의 배수의 집합
- ② 18의 배수의 집합
- ③ 20의 배수의 집합
- ④ 24의 배수의 집합
- ⑤ 36의 배수의 집합

해설

6의 배수의 집합을 원소나열법으로 나타내면 {6, 12, 18, 24, 30, 36, ...}이다.

12의 배수의 집합, 18의 배수의 집합, 24의 배수의 집합, 36의 배수의 집합은 모두 6의 배수의 집합의 부분집합이다.

2. $a_n = 3 \cdot 2^{1-2n}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항과 공비 r 을 차례대로 구하면?

- ① $\frac{3}{2}, \frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$ ③ 3, 2 ④ 3, 4 ⑤ 3, $\frac{1}{2}$

해설

$$a_1 = 3 \cdot 2^{1-2} = \frac{3}{2}, \quad a_2 = 3 \cdot 2^{1-2 \cdot 2} = \frac{3}{8}$$

$$\therefore r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore a_1 = \frac{3}{2}, \quad r = \frac{1}{4}$$

3. $a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_5 의 값은?

① 4 ② 8 ③ 16 ④ 32 ⑤ 48

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열이므로 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
 $\therefore a_5 = 3 \cdot 2^4 = 48$

4. 다음 식의 값은?

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

- ① 9

② $3\sqrt{11}-\sqrt{2}$

③ $\sqrt{99}-1$

④ $\sqrt{101}-1$

⑤ 11

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식})&= \sum_{k=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} = \sum_{k=1}^{99} (\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) \\&= (\sqrt{2}-1) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \cdots + (\sqrt{100}-\sqrt{99}) \\&= \sqrt{100}-1=9\end{aligned}$$

5. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2-1}$ 의 값은?

① $\frac{1}{n+1}$

② $\frac{n}{n+1}$

③ $\frac{2n}{n+1}$

④ $\frac{n}{2n+1}$

⑤ $\frac{2n}{2n+3}$

해설

$$\begin{aligned} \text{(주어진 식)} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) \right\} \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1} \end{aligned}$$

6. $a_1 = 1$, $a_{n+1} - a_n = 3 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 $\sum_{k=1}^{20} a_k$ 의 값은?

① 115 ② 270 ③ 326 ④ 445 ⑤ 590

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열이므로

$$\sum_{k=1}^{20} a_k = \frac{20(2 \cdot 1 + 19 \cdot 3)}{2} = 590$$

7. 두 집합 $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 집합 $C = \{x \mid x = a \times b, a \in A, b \in B\}$ 이다. 이때, 집합 C 를 원소나열법으로 나타낸 것은?
- ① $\{0\}$ ② $\{0, 1\}$ ③ $\{0, 1, 2\}$
④ $\{0, 1, 2, 3\}$ ⑤ $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

해설

$0 \times 1 = 0, 0 \times 2 = 0, 0 \times 3 = 0, 1 \times 1 = 1, 1 \times 2 = 2, 1 \times 3 = 3$
이므로 $C = \{0, 1, 2, 3\}$ 이다.

8. 부분집합에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?

- ① 모든 집합은 자기 자신을 부분집합으로 한다.
- ② 공집합은 모든 집합의 부분집합이다.
- ③ $A \subset B$, $B \subset A$ 인 집합 A, B 는 존재하지 않는다.
- ④ 공집합은 $\{0\}$ 의 부분집합이다.
- ⑤ $\{1, 3, 5\}$ 는 $\{x \mid x \text{는 } 5 \text{ 미만인 홀수}\}$ 의 부분집합이 아니다.

해설

$A \subset B$, $B \subset A$ 는 $A = B$ 를 의미하며 이를 만족하는 집합은 무수히 많이 존재한다.

9. $A = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수 중 소수인 수}\}$ 일 때, A 의 부분집합의 개수를 구하면?

① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개 ④ 15 개 ⑤ 32 개

해설

12의 약수는 1, 2, 3, 4, 6, 12이고, 그중 소수는 2, 3이므로 $A = \{2, 3\}$ 이다.
따라서 A 의 부분집합의 개수는 $2^2 = 4$ (개)이다.

10. 다음 명제 중에서 참인 것의 개수는?

- ㉠ 정수 n 에 대하여, n^2 이 짝수이면 n 도 짝수이다.

㉡ $xy \neq 6$ 이면 $x \neq 2$ 이거나 $y \neq 3$ 이다.

㉢ x, y 가 실수일 때, $x + y > 0$ 이면 $x > -1$ 또는 $y > 1$ 이다.

㉣ $x + y$ 가 유리수이면 x, y 중 적어도 하나는 유리수이다.

① 0 개 ② 1 개 ③ 2 개 ④ 3 개 ⑤ 4 개

해설

㉠, ㉡, ㉢의 경우 그 대우를 적어 보면
㉠의 대우: 정수 n 에 대하여, n 이 홀수이면 n^2 도 홀수이다.
㉡의 대우: $x = 2$ 이고 $y = 3$ 이면 $xy = 6$ 이다.
㉢의 대우: x, y 가 실수일 때, $x \leq -1$ 이고 $y \leq 1$ 이면 $x + y \leq 0$ 이다. 이것은 모두 참임을 알 수 있다.
㉣의 반례: $x = \sqrt{2}, y = -\sqrt{2}$ 이면 $x + y$ 가 유리수지만 x, y 는 모두 무리수이다.

11. 두 조건 $p: |x-k| \leq 1$, $q: -7 \leq x \leq 3$ 에서 명제 $p \rightarrow q$ 가 참일 때, k 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① -12 ② -4 ③ 8 ④ 4 ⑤ 12

해설

$P \subset Q$

$$p: |x-k| \leq 1 \rightarrow k-1 \leq x \leq k+1$$

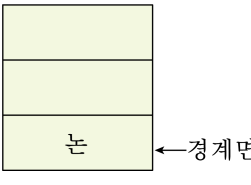
$$-7 \leq k-1 \rightarrow -6 \leq k$$

$$k+1 \leq 3 \rightarrow k \leq 2$$

$$\therefore -6 \leq k \leq 2$$

$$(-6) + 2 = -4$$

12. 한 농부가 다음 그림과 같이 바깥쪽으로 철조망을 치고 안쪽에 2개의 철조망을 설치하여 세 개의 직사각형 모양의 논의 경계선을 만들려고 한다. 논 바깥쪽 경계를 표시하는 철조망은 1m에 3만원, 논 안쪽의 경계를 표시하는 철조망은 1m에 1만원의 비용이 든다면 넓이가 27m²인 논의 경계선을 만들 때의 최소비용은? (단, 철조망 두께는 생각하지 않는다)



- ① 70만원 ② 71만원 ③ 72만원
 ④ 73만원 ⑤ 74만원

해설

논의 세로의 길이를 x 라 하면
 가로 길이는 $\frac{27}{x}$ m이므로
 총 비용은

$$3 \times 2x + 3 \times \frac{27}{x} \times 2 + \frac{27}{x} \times 2$$

$$= 6x + \frac{162}{x} + \frac{54}{x}$$

$$= 6x + \frac{216}{x}$$

$$\geq 2\sqrt{6x \cdot \frac{216}{x}}$$

$$= 2\sqrt{1296} = 2 \times 36 = 72$$
 $\therefore$ 최소비용은 72만 원

13. 수열 $a(1+r) + a(1+r)^2 + a(1+r)^3 + \cdots + a(1+r)^n$ 의 합은? (단, $r \neq 0$)

① $\frac{2a + 4r^n}{r}$

③ $\frac{a(1+r) + (1+r)^n}{r}$

⑤ $\frac{a(1+r) - r^n + 2}{r}$

② $\frac{a(1+r) \{ (1+r)^n - 1 \}}{r}$

④ $\frac{a(1+r) \{ (1+r)^{2n} - 1 \}}{r}$

해설

첫째항이 $a(1+r)$, 공비가 $1+r$, 항수가 n 인 등비수열의 합이므로 $1+r \neq 1$ 즉, $r \neq 0$ 일 때,

$$S = \frac{a(1+r) \{ (1+r)^n - 1 \}}{(1+r) - 1}$$

$$= \frac{a(1+r) \{ (1+r)^n - 1 \}}{r}$$

14. $\sum_{l=1}^n (\sum_{k=1}^l k) = 364$ 를 만족하는 n 의 값은?

① 10

② 11

③ 12

④ 13

⑤ 14

해설

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^n (\sum_{k=1}^l k) &= \sum_{l=1}^n \left\{ \frac{l(l+1)}{2} \right\} = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n (l^2 + l) \\&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right\} \\&= \frac{1}{2} \times \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \\&= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \\&= 364 = 2^2 \times 7 \times 13 \\&\therefore n(n+1)(n+2) = 6 \times 2^2 \times 7 \times 13 = 12 \times 13 \times 14 \\&\text{따라서 } n = 12\end{aligned}$$

15. $\sum_{k=1}^n a_k = n^2 + 3n$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{24}$
- ② $\frac{1}{48}$
- ③ $\frac{5}{16}$
- ④ $\frac{5}{24}$
- ⑤ $\frac{5}{48}$

해설

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n^2 + 3n - \{(n-1)^2 + 3(n-1)\} = 2n + 2 \ (n \geq 2) \\ a_1 &= 1 + 3 = 2 + 2 = 4 \circ \text{므로, } a_n = 2n + 2 \ (n \geq 1) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{a_k a_{k+1}} &= \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{(2k+2)(2k+4)} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12} \right) = \frac{5}{24} \end{aligned}$$

16. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_{10} = 2^{50}$, $a_{n+1} = 2^n a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 일 때, 이 수열의 첫째항은?

① 32 ② 64 ③ 128 ④ 256 ⑤ 512

해설

$a_{n+1} = 2^n a_n$ 에서 n 대신에 $1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례로 대입하면

$$a_2 = 2^1 a_1$$

$$a_3 = 2^2 a_2$$

$$a_4 = 2^3 a_3$$

$\vdots$

$\vdots$

$$a_n = 2^{n-1} a_{n-1}$$

이 등식들을 변끼리 곱하면

$$a_n = 2^1 \cdot 2^2 \cdots 2^3 \cdots 2^{n-1} \cdot a_1$$

$$\therefore a_n = 2^{1+2+3+\cdots+(n-1)} \cdot a_1 = a_1 \cdot 2^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

$$a_{10} = 2^{50} \text{ 이므로 } 2^{50} = a_1 \cdot 2^{45}$$

$$a_1 = 2^5 = 32$$

17. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 일 때, 일반항 a_n 은?

- ① $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ② $2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ③ $\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{2}$
 ④ 2^{n-1} ⑤ $2^n - 1$

해설

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1$ 을 $a_{n+1} - \alpha = \frac{1}{2}(a_n - \alpha)$ 의 꼴로 변형하면

$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{\alpha}{2}$ 에서 $\frac{\alpha}{2} = 1 \therefore \alpha = 2$

즉, $a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$

따라서 수열 $\{a_n - 2\}$ 는 첫째항이 $a_1 - 2 = -1$ 이고 공비가 $\frac{1}{2}$ 인

등비수열이므로

$a_n - 2 = (-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \therefore a_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

18. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ 이고, $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 을 만족할 때, 일반항 a_n 을 구하면?

- ① 2^{n-1} ② 3^{n-1} ③ 4^{n-1} ④ 5^{n-1} ⑤ 6^{n-1}

해설

$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$ 에서
 $a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n)$
 $a_{n+1} - a_n = b_n$ 으로 놓으면 $b_{n+1} = 3b_n$
이때, 수열 $\{b_n\}$ 은 공비가 3 인 등비수열이고,
 $b_1 = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$ 이므로
 $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$
수열 $\{b_n\}$ 은 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열이므로
 $a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2 \cdot 3^{k-1}$
 $= 1 + \frac{2(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} = 3^{n-1}$

19. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ 이 성립함을 증명한 것이다. □안에 알맞은 것은?

보기

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) = 1, (우변) = $1^2 = 1$ 이므로 등식이 성립한다.
(ii) $n = k$ 일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$
이 식의 양변에 □을 더하면
 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + \square = (k + 1)^2$ 이므로
 $n = k + 1$ 일 때에도 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

① $2k + 1$

② $2k - 1$

③ $2k$

④ $k + 1$

⑤ $k - 1$

해설

(i) $n = 1$ 일 때, (좌변) = 1, (우변) = $1^2 = 1$ 이므로 등식이 성립한다.
(ii) $n = k$ 일 때, 등식이 성립한다고 가정하면 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$
이 식의 양변에 $\boxed{2k + 1}$ 을 더하면
 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) + \boxed{2k + 1} = (k + 1)^2$ 이므로
 $n = k + 1$ 일 때에도 등식은 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

20. $a_1 = 1$, $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의되는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값은?

- ① $\frac{1}{45}$ ② $\frac{1}{46}$ ③ $\frac{1}{47}$ ④ $\frac{1}{48}$ ⑤ $\frac{1}{49}$

해설

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + n \text{ 이므로 } \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + \sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n + 2}{2}$$

$$\therefore a_n = \frac{2}{n^2 - n + 2}$$

$$a_{10} = \frac{2}{10^2 - 10 + 2} = \frac{1}{46}$$

21. $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 으로 정의될 때, a_{15} 의 값은?

- ① $\frac{1}{17}$ ② $\frac{1}{21}$ ③ $\frac{1}{29}$ ④ $\frac{1}{31}$ ⑤ $\frac{1}{39}$

해설

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 1} \text{ 에서 양변에 역수를 취하면 } \frac{1}{a_{n+1}} = 2 + \frac{1}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_n} = b_n \text{ 이라 두면 } b_{n+1} = b_n + 2, b_1 = 3$$

$$\text{따라서, } b_n = 3 + (n-1) \cdot 2 = 2n + 1$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{2n + 1}$$

$$\therefore a_{15} = \frac{1}{31}$$

22. 비어 있는 물탱크에 물을 채우려고 한다. 첫째 날은 7L의 물을 채우고, 다음 날부터 전날 채운 물의 양의 $\frac{4}{3}$ 배보다 1L 적은 양을 채우기로 하였다. 열 번째 날 물탱크에 채우는 물의 양은?

- ① $4 \left(\frac{2}{3}\right)^{10} + 3L$ ② $4 \left(\frac{3}{4}\right)^9 + 3L$ ③ $4 \left(\frac{3}{5}\right)^9 + 3L$
 ④ $4 \left(\frac{4}{3}\right)^{10} + 3L$ ⑤ $4 \left(\frac{5}{3}\right)^{10} + 3L$

해설

첫째 날에 물탱크에 채우는 물의 양을 a_1 이라 하면 $a_1 = 7$
 n 번째 날에 물탱크에 채우는 물의 양을 a_n 이라 하면

$$a_1 = 7, a_{n+1} = \frac{4}{3}a_n - 1$$

이때, $a_{n+1} - \alpha = \frac{4}{3}(a_n - \alpha)$ 라 하면 $-\frac{1}{3}\alpha = -1, \alpha = 3$

$$\therefore a_{n+1} - 3 = \frac{4}{3}(a_n - 3)$$

따라서 수열 $\{a_n - 3\}$ 은 첫째항이 $a_1 - 3 = 7 - 3 = 4$, 공비가 $\frac{4}{3}$

인 등비수열이므로

$$a_n - 3 = 4 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \quad \therefore a_n = 4 \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} + 3$$

$$\therefore a_{10} = 4 \left(\frac{4}{3}\right)^{10-1} + 3 = 4 \left(\frac{4}{3}\right)^9 + 3(L)$$