1. 집합 $A = \{1,\ 2,\ \{1,\ 2\}\}$ 일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은 ?

① $A \supset \{1,\ 2\}$　② $A \ni \{1,\ 2\}$　③ $A \supset \{\{1,\ 2\}\}$

④ $A \ni \{1\}$　⑤ $A \supset \varnothing$

해설

$\{1,\ 2\}$는 A의 원소이고 또 A의 부분집합도 된다. $\therefore\ A \ni \{1,\ 2\},\ A \supset \{1,\ 2\}$

$\{1\}$은 A 의 부분집합이지만 A의 원소는 아니다. $\therefore\ A \supset \{1\},\ A \not\ni \{1\},\ A \ni 1$

2. 다음 중 집합 $A = \{x \mid x$는 6의 약수$\}$ 의 부분집합인 것을 고르면?

① $\{0, 2\}$ ② $\{1, 4\}$ ③ $\{1, 2, 6\}$
④ $\{1, 3, 5\}$ ⑤ $\{4, 5, 6\}$

해설

$A = \{x \mid x$는 6의 약수$\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$
따라서 $\{1, 2, 6\} \subset A$ 이다.

3. 세 집합 $A = \{x \mid x$는 8의 약수$\}$, $B = \{5, 6, 7, 9, 11\}$, $C = \{x \mid x$는 12의 약수$\}$ 에 대하여
$(C \cap A) \cup B$ 의 원소 중에서 가장 큰 원소를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

조건제시법을 원소나열법으로 고쳐보면 $A = \{1, 2, 4, 8\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 가 된다.
먼저 C 와 A 의 교집합을 구해보면 $C \cap A = \{1, 2, 4\}$ 이고 B와 합집합을 구하면
$(C \cap A) \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 11\}$ 이 된다. 가장 큰 원소는 11 이다.

4. 두 집합 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}, B = \{5, 8, 9\}$ 에 대하여 $(A - B) \cup (B - A)$ 는?

① $\{1, 3\}$ ② $\{1, 3, 5\}$ ③ $\{1, 3, 7\}$
④ $\{1, 3, 5, 8\}$ ⑤ $\{1, 3, 7, 8\}$

해설

$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 3, 5, 7, 8, 9\} - \{5, 9\} = \{1, 3, 7, 8\}$ 이다.

5. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A - B$ 와 다른 집합은?

① $(A \cup B) - B$　　② $A - (A \cap B)$

③ $A \cap B^c$　　④ $B^c - A^c$

⑤ $(A \cup B) - (A \cap B)$

해설

$A - B = A \cap B^c = A - (A \cap B) = (A \cup B) - B = B^c - A^c$ 이므로 ⑤이다.

6. $a > b > c > 0$일 때, $A = \dfrac{c}{b-a}$, $B = \dfrac{a}{b-c}$, $C = \dfrac{b}{a-c}$의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $A < B < C$　　② $A < C < B$　　③ $B < C < A$

④ $B < A < C$　　⑤ $C < A < B$

해설

$a > b > c > 0$에서

$b-a < 0,\ b-c > 0,\ a-c > 0$이므로

$A = \dfrac{c}{b-a} < 0,\ B = \dfrac{a}{b-c} > 0$

$C = \dfrac{b}{a-c} > 0$

$$\begin{aligned} B - C &= \frac{a}{b-c} - \frac{b}{a-c} = \frac{a(a-c) - b(b-c)}{(b-c)(a-c)} \\ &= \frac{a^2 - ac - b^2 + bc}{(b-c)(a-c)} \\ &= \frac{(a-b)(a+b) - c(a-b)}{(b-c)(a-c)} \\ &= \frac{(a-b)(a+b-c)}{(b-c)(a-c)} > 0 \end{aligned}$$

$\therefore B > C$

따라서 $A < 0,\ B > C > 0$이므로

$B > C > A$이다.

7. 분수식 $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{a}}} \times \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{a}}}$ 을 간단히 하면?

① 1　　② $1-a$　　③ $1-a^2$

④ $1+a^2$　　⑤ $1+a$

해설

$$\text{준식} = \frac{1}{1-\dfrac{a}{a-1}} \times \frac{1}{1-\dfrac{a}{a+1}}$$
$$= \frac{a-1}{a-1-a} \times \frac{a+1}{a+1-a}$$
$$= \frac{a-1}{-1} \times \frac{a+1}{1} = 1-a^2$$

8. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B가 $\{(A-B)\cup(A\cap B)\}\cap B = B$를 만족할 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $A \subset B$　　② $A = B$　　③ $A^c \subset B^c$

④ $A \cap B = \varnothing$　　⑤ $A \cup B = U$

해설

$\{(A\cap B^c)\cup(A\cap B)\}\cap B$
$= \{A\cap(B^c\cup B)\}\cap B$
$= (A\cap U)\cap B = A\cap B = B$
즉, $B \subset A$ 이다.
따라서 $A^c \subset B^c$ 역시 성립한다.

9. 다음 명제 중에서 그 역이 참인 것은? (단, 문자는 실수)

① $x = 0$ 이면 $xy = 0$ 이다.

② $x \geq 1$ 이면 $x^2 \geq 1$ 이다.

③ $x \leq 1$ 이고 $y \leq 1$ 이면 $x + y \leq 2$ 이다.

④ $a^2 + b^2 > 0$ 이면 $a \neq 0$ 또는$b \neq 0$ 이다.

⑤ $a = b$ 이고 $c = d$ 이면 $a + c = b + d$ 이다.

해설

역인 명제는
① $xy = 0$ 이면 $x = 0$ (거짓) (반례 : $x = 1, y = 0$)
② $x^2 \geq 1$ 이면 $x \geq 1$ (거짓) (반례 : $x = -1$)
③ $x + y \leq 2$ 이면 $x \leq 1$ 이고 $y \leq 1$ (거짓) (반례 : $x = 2,\ y = 0$)
④ $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$ 이면 $a^2 + b^2 > 0$ (참)
⑤ $a + c = b + d$ 이면 $a = b$ 이고 $c = d$ (거짓) (반례 : $a = -1,\ b = -2,\ c = 3,\ d = 4$)

10. 다음에서 조건 p가 조건q 이기 위한 필요조건이고 충분조건은 아닌 것을 골라 기호로 써라. (단,a, b 는 실수)

㉠ p : $A \cup B = B$, q : $A \subset B$
㉡ p :$a^2 + b^2 = 0$, q : $a = 0$ 이고 $b = 0$
㉢ p :$a^2 = b^2$ q : $a = b$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

㉢ $p : a^2 = b^2 \leftarrow q : a = b$
$\therefore$ p는 q이기 위한 필요조건

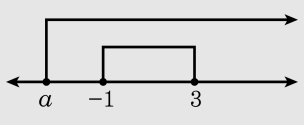
11. $x \geq a$가 $-2 \leq x-1 \leq 2$이기 위한 필요조건 일 때, 상수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a \geq -1$　　② $a \leq -1$　　③ $a \leq 3$

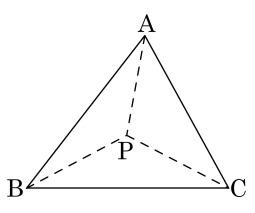
④ $a \geq 3$　　⑤ $a > 3$

해설

$-2 \leq x-1 \leq 2 \rightarrow -1 \leq x \leq 3$,
$x \geq a$ 가 $-1 \leq x \leq 3$의 범위를 포함해야 한다.



12. 넓이가 a인 삼각형 ABC의 내부에 한 점 P에 대하여 △PAB, △PBC, △PCA의 넓이를 각각 S_1, S_2, S_3이라 할 때 $S_1^2+S_2^2+S_3^2$의 최솟값은?



① $\frac{a^2}{3}$ ② a^2 ③ $\sqrt{3}a^2$
④ $3a^2$ ⑤ $3\sqrt{3}a^2$

해설

$S_1+S_2+S_3=a$

$(1^2+1^2+1^2)(S_1^2+S_2^2+S_3^2) \geq (S_1+S_2+S_3)^2=a^2$

$\therefore S_1^2+S_2^2+S_3^2 \geq \frac{a^2}{3}$

13. f는 임의의 자연수에 대하여 정의된 함수이고, 다음 두 조건을 만족한다.

㉠ $f(2n) = 2 \cdot f(n)(n = 1, 2, 3, \cdots)$
㉡ $f(2n+1) = (-1)^n \cdot 2(n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$

이 때, $f(32)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 64

해설

$$\begin{aligned} f(32) &= 2 \cdot f(16) = 2^2 \cdot f(8) = 2^3 \cdot f(4) \\ &= 2^4 \cdot f(2) = 2^5 \cdot f(1) = 2^5 \cdot f(2 \cdot 0 + 1) \\ &= 2^5 \cdot (-1)^0 \cdot 2 = 2^6 = 64 \end{aligned}$$

14. 자연수 a, k 에 대하여 집합 $X = \{1, 2, 3, k\}$ 에서 집합 $Y = \{4, 7, a^4, a^2+3a\}$ 로의 함수 $f(x) = 3x+1$ 이 일대일 대응일 때, $a+k$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

함수 f 가 일대일 대응이고, $f(x) = 3x+1$ 에서 $f(1) = 4$, $f(2) = 7$ 이므로

$f(3) = a^4$ 또는 $f(3) = a^2+3a$ 이어야 한다.

만약 $f(3) = a^4$ 이면 $a^4 = 3\times3+1$ $\quad\therefore a^4 = 10$

그런데 $a^4 = 10$ 을 만족하는

자연수 a 가 존재하지 않으므로 모순이다.

$\therefore f(3) = a^2+3a,\ f(k) = a^4$

$f(3) = a^2+3a$ 에서 $a^2+3a = 10$

$a^2+3a-10 = 0,\ \ (a-2)(a+5) = 0$

$\therefore a = 2(\because a$는 자연수$)$

$f(k) = a^4$, 즉 $a^4 = 3k+1$ 에서 $3k+1 = 16$

$\therefore k = 5$

$\therefore a+k = 2+5 = 7$

15. 함수 $f(x) = x^3 + x^2 + x - 5$ 일 때, $(f \circ f)(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -11

해설

$(f \circ f)(x) = \left(x^3 + x^2 + x - 5\right)^3$
$+ \left(x^3 + x^2 + x - 5\right)^2 + \left(x^3 + x^2 + x - 5\right) - 5$

$(f \circ f)(x)$ 를 $x-1$ 로 나눈 나머지는 나머지 정리에 의하여 위의 식에 $x = 1$을 대입한 것과 같다.

$f(1) = -2$ 이므로

$\therefore\ f(f(1)) = (-2)^3 + (-2)^2 + (-2) - 5 = -11$

16. 삼차함수 $f(x) = ax^3 + b$ 의 역함수f^{-1} 가$f^{-1}(5) = 2$ 를 만족시킬 때, $8a + b$ 의 값을 구하여라.

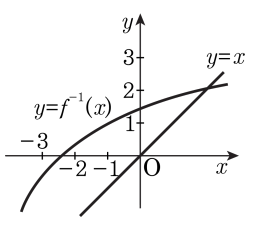
▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

역함수의 성질에서 $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$
즉 $f^{-1}(5) = 2 \quad \Rightarrow \quad f(2) = 5$ 이다.
따라서, $f(x) = ax^3 + b$ 에서
$\therefore f(2) = 8a + b = 5$

17. 함수 $y = f^{-1}(x)$ 의그래프와 직선 $y = x$ 의 그래프가 아래 그림과 같다. 방정식 $f(x) = 0$ 의 해를 α 라고 할 때 다음 중 옳은 것을 고르면?

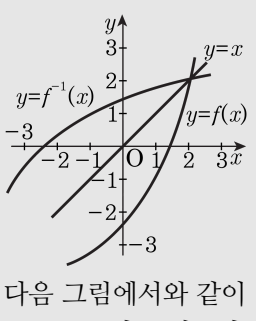


① $-3 < \alpha < -2$　　② $-2 < \alpha < -1$

③ $0 < \alpha < 1$　　④ $1 < \alpha < 2$

⑤ $2 < \alpha < 3$

해설



다음 그림에서와 같이
$y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는
직선 $y = x$ 에 대하여 대칭을 이룬다.
따라서 $f(x) = 0$ 의 해는 $y = f(x)$ 의 그래프가
x 축과 만나는 점의 x 좌표이므로
$1 < \alpha < 2$ 이다.

18. 0이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 $a^2 - 3ab + b^2 = 0$이 성립할 때, $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

준식의 양변을 ab로 나누면 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3$

$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - 2 = 9 - 2 = 7$

따라서, 구하는 식의 값은 7이다.

19. $2x-y+z=0,\ x-2y+3z=0$일 때, $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2+z^2}$의 값을 구하면 $\dfrac{n}{m}$이다. 이때, $m+n$의 값을 구하여라.(단, m, n은 서로소)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$2x-y+z=0\cdots$ ㉠

$x-2y+3z=0\cdots$ ㉡

㉠ $\times 2-$ ㉡ : $3x=z$

$\therefore x=\dfrac{z}{3},\ y=\dfrac{5z}{3}$

여기서 $x=k$ 라 하면 $y=5k,\ z=3k$

따라서 $\dfrac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2+z^2}=\dfrac{k^2-5k^2+25k^2}{k^2+25k^2+9k^2}=\dfrac{3}{5}\quad \therefore m=5,\ n=3$

$\therefore m+n=8$

20. 함수 $f(x) = \dfrac{ax}{2x+3}$ 는 그 정의역과 치역이 같다고 한다. a의 값은? (단, $x \neq -\dfrac{3}{2}$)

① -3　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 3

해설

$y = \dfrac{ax}{2x+3} = \dfrac{a}{2} + \dfrac{-\frac{3}{2}a}{2x+3}$ 이므로 치역은

$y \neq \dfrac{a}{2}$ 인 실수이다.

$\therefore \dfrac{a}{2} = -\dfrac{3}{2}$, 곧 $a = -3$

21. $y = -\sqrt{4-2x}+1$의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은?

① 정의역은 $\{x \mid x \le 2\}$이다.

② 치역은 $\{y \mid y \le 1\}$이다.

③ 평행이동하면 $y = -\sqrt{2x}$와 겹쳐진다.

④ 그래프는 제 2사분면을 지나지 않는다.

⑤ 이 그래프는 x축과 점 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$에서 만난다.

해설

③ 평행이동하면 $y = -\sqrt{-2x}$와 겹쳐진다.

④, ⑤ 꼭지점이 $(2,\ 1)$이고 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$을 지난다.

$\therefore$ 1, 3, 4, 분면을 지난다.

22. 다음 보기에서 무리함수 $y = -\sqrt{a(x-1)} + 1$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $a = -1$이면 그래프는 제2사분면을 지난다.

㉡ $a > 0$이면 치역은 $\{y | y \le 1\}$이다.

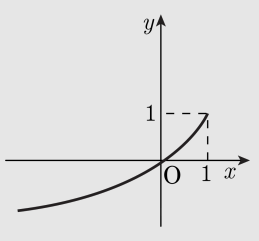
㉢ $a < 0$이면 치역은 $\{y | y \le 1\}$이다.

㉣ $y = \sqrt{x} + 1$의 그래프와 만날 수 있다.

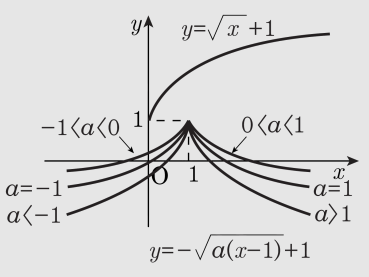
① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉢　③ ㉠, ㉣　④ ㉡, ㉢　⑤ ㉡, ㉣

해설

㉠ $a = -1$이면 주어진 무리함수는
$y = -\sqrt{-(x-1)} + 1$
$y = -\sqrt{-x}$의 그래프를 x 축의 방향으로 1만큼,
y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한
것이므로 그래프는 오른쪽과 같다.
따라서 그래프는 제2사분면을 지나지 않는다.



㉡, ㉢ $a > 0$ 또는 $a < 0$일 때
항상 $\sqrt{a(x-1)} \ge 0$이므로 치역은 $\{y | y \le 1\}$
㉣ $y = -\sqrt{a(x-1)} + 1$의 그래프는
아래와 같으므로 $y = \sqrt{x} + 1$의
그래프와 만나지 않는다.
따라서 옳은 것은 ㉡, ㉢이다.



23. 두 집합 A, B에 대하여 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 고르면?

① $A \cup B = B \cup A$

② $B \subset A$이면 $A \cap B = B$

③ $A \cap A = \varnothing$

④ $B \cap \varnothing = \varnothing$

⑤ $A \subset (A \cup B)$

해설

③ $A \cap A = A$

24. 두 집합 $A = \{4,\ 6,\ x\}, B = \{1,\ 3,\ x+3\}$ 에 대하여 $A \cup B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 를 만족할 때, x 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$A \cup B = \{1, 3, 4, 6, x, x+3\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 이므로
$x = 2,\ x + 3 = 5$ 이다. 따라서 $x = 2$

25. 두 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3\}$ 에 대하여 $A \cap X = X$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 4개 ② 6개 ③ 8개 ④ 12개 ⑤ 16개

해설

집합 X 는 원소 $2, 3$ 을 반드시 포함하는 집합 A 의 부분집합이다.
$\therefore\ n(X) = 2^{5-2} = 2^3 = 8$ (개)

26. $x > 2$ 일 때, $x + \frac{1}{x-2}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$x > 2$ 에서 $x - 2 > 0$ 이므로
산술평균과 기하평균의 관계를 이용하면

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x-2} &= x - 2 + \frac{1}{x-2} + 2 \\ &\geq 2\sqrt{(x-2) \times \frac{1}{x-2}} + 2 \\ &= 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $x = 3$ 일 때 성립)

27. 다항식 $f(x)$ 가 임의의 실수 $x,\ y$에 대하여 $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y),\ f(1) = 1$ 을 만족시킬 때, $f(0) + f(2)$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

임의의 실수에 대하여
$f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$를 만족하므로
$x = 1,\ y = 1$ 을 준식에 대입하면
$1 = 1 \cdot 1 = f(1)f(1) = f(2) + f(0)$
$\therefore f(0) + f(2) = 1$

28. 두 함수 $f(x)=2x-1$, $g(x)=-x+2$ 의 역함수를 각각 f^{-1}, g^{-1} 라고 할 때, $\left(f\circ(f\circ g)^{-1}\circ f\right)(5)$ 의 값은?

① -1　　② -3　　③ -5　　④ -7　　⑤ -9

해설

$$\begin{aligned} f\circ(f\circ g)^{-1}\circ f &= f\circ\left(g^{-1}\circ f^{-1}\right)\circ f \\ &= f\circ g^{-1}\circ\left(f^{-1}\circ f\right) \\ &= f\circ g^{-1}\circ I \\ &= f\circ g^{-1} \end{aligned}$$

따라서, 구하는 값은 $\left(f\circ g^{-1}\right)(5)=f(g^{-1}(5))$

$g^{-1}(5)=k$ 로 놓으면 $g(k)=5$

$-k+2=5$ 에서 $k=-3$, 즉 $g^{-1}(5)=-3$

$\therefore f(g^{-1}(5))=f(-3)=2\times(-3)-1=-7$

29. 다음 <보기> 에 주어진 함수의 그래프 중에서 y 축에 대하여 대칭인 것을 모두 고르면?

Ⅰ. $y = 2\|x\| + 1$ Ⅱ. $\|y\| = 2x + 1$ Ⅲ. $\|y\| = 2\|x\| + 1$

① Ⅰ ② Ⅱ ③ Ⅲ ④ Ⅰ, Ⅱ ⑤ Ⅰ, Ⅲ

해설

Ⅰ. x에 절댓값이 있으므로 y축에 대하여 대칭
Ⅱ. y에 절댓값이 있으므로 x축에 대하여 대칭
Ⅲ. x, y 에 모두 절댓값이 있으므로 원점에 대하여 대칭이고 또한 y축에 대해서도 대칭이다.

30. 다음 등식 $x = \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \cdots}}}}$ 을 만족하는 x 값을 간단히 한 것은?

① $\frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$　② $\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$　③ 1.5

④ $\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{7}\right)$　⑤ $\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

해설

$$x = \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{\frac{3}{2} + \cdots}}}}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{2} + x}$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{3}{2} + x$$

$$\Rightarrow x^2 - x - \frac{3}{2} = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{7}}{2} (\because x > 0)$$

31. $x = \dfrac{1}{2 - \sqrt[3]{2}}$ 일 때, $6x^3 - 12x^2 + 6x$ 의 값은?

① $2\sqrt[3]{2}$ ② $\sqrt[3]{2}$ ③ 2 ④ 1 ⑤ 0

해설

$x = \dfrac{1}{2 - \sqrt[3]{2}}$ 에서 양변에 $2 - \sqrt[3]{2}$ 를 곱하면

$(2 - \sqrt[3]{2})x = 1,\ 2x - 1 = \sqrt[3]{2}x$

$(2x - 1)^3 = 2x^3$ 을 정리하면

$6x^3 - 12x^2 + 6x - 1 = 0$

$\therefore\ 6x^3 - 12x^2 + 6x = 1$