

1. 10 보다 크고 20 보다 작은 자연수 중에서 4 의 배수의 집합을 A 라고 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $10 \in A$

② $14 \in A$

③ $16 \notin A$

④ $18 \notin A$

⑤ $20 \in A$

해설

집합 A 의 원소는 12, 16 이므로 $18 \notin A$ 이다.

2. 양수 x 에 대하여 $\frac{x^2+2x+2}{x}$ 는 $x = a$ 에서 최솟값 b 를 가질 때, $-2a + b + 1$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$x > 0$ 이므로 산술평균, 기하평균에 의하여

$$\frac{x^2+2x+2}{x} = x + 2 + \frac{2}{x}$$

$$x + \frac{2}{x} + 2 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{2}{x}} + 2 = 2\sqrt{2} + 2$$

(단, 등호는 $x = \sqrt{2}$ 일 때 성립)

최솟값이 $2\sqrt{2} + 2$ 이므로 $b = 2\sqrt{2} + 2$

등호는 $x = \sqrt{2}$ 일 때 성립하므로 $a = \sqrt{2}$

따라서 $-2a + b + 1 = -2\sqrt{2} + (2\sqrt{2} + 2) + 1 = 3$

3. $\sum_{k=1}^{49} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} = a\sqrt{2} + b$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{49} \frac{1}{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{49} \frac{\sqrt{k} - \sqrt{k+1}}{(\sqrt{k} + \sqrt{k+1})(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})} \\ &= \sum_{k=1}^{49} (\sqrt{k} - \sqrt{k+1}) \\ &= -\{(\sqrt{1} - \sqrt{2}) + (\sqrt{2} - \sqrt{3}) + \cdots\} \\ &+ \{(\sqrt{49} - \sqrt{50})\} \\ &= -(1 - \sqrt{50}) = 5\sqrt{2} - 1 \\ &\text{따라서, } a = 5, b = -1 \text{ 에서 } a + b = 4 \end{aligned}$$

4. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ 의 값은?

① $\frac{1}{n+1}$

② $\frac{2n}{n+1}$

③ $\frac{n}{2n+1}$

④ $\frac{n}{n+2}$

⑤ $\frac{2n}{2n+1}$

해설

$$\begin{aligned} \text{준 식)} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) \right\} + \cdots + \\ &\quad \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= \frac{n}{2n+1} \end{aligned}$$

5. $a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n + 3 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{10} 의 값은?

① 29

② 31

③ 33

④ 35

⑤ 37

해설

$a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n + 3$ 이므로
 a_n 은 초항이 4, 공차가 3 인 등차수열
 $\therefore a_n = 4 + (n - 1) \cdot 3$
 $= 4 + 3n - 3$
 $= 3n + 1$
 $\therefore a_{10} = 31$

6. 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $\{x, y\} \subset \{y, x, z\}$
- ② $\{\emptyset\} \subset \{4, \{4, \emptyset\}\}$
- ③ $\{4, 8\} \subset \{4, 4 \times 2\}$
- ④ $\{1, 3, 5\} \subset \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$
- ⑤ $\emptyset \subset \emptyset$

해설

- ② $\{\emptyset\} \not\subset \{4, \{4, \emptyset\}\}$

7. $A \subset B$ 이고 $n(A) = 10$, $n(B) = 22$ 일 때, $n(A \cap B)$, $n(A \cup B)$ 의 합은?

① 10

② 15

③ 18

④ 22

⑤ 32

해설

$A \subset B$ 이므로 $A \cap B = A$, $A \cup B = B$ 이다.

$$n(A \cap B) = n(A) = 10$$

$$n(A \cup B) = n(B) = 22$$

$$\therefore n(A \cap B) + n(A \cup B) = 10 + 22 = 32$$

8. 네 집합 A, B, C, D 는 각각 한 개의 원소로 이루어져 있으며 다음을 만족시킨다. 이 때, 집합 B 의 원소는?

- ㉠

$A \cup B \cup C \cup D = \{p, q, r, s\}$
- ㉡

$p \in A \cup C$
- ㉢

$q \in A \cup B$
- ㉣

$r \in B \cup C$
- ㉤

$A \subset \{q, s\}$

- ①

p
- ②

q
- ③

r
- ④

s
- ⑤

알 수 없다.

해설

㉡, ㉢, ㉣에서 $A \cup B \cup C = \{p, q, r\}$
따라서 $D = \{s\}$
㉤에서 $A = \{q\}$, ㉡에서 $C = \{p\}$
따라서 $B = \{r\}$

9. x, y 가 0보다 큰 실수일 때, $(2x+y)\left(\frac{8}{x}+\frac{1}{y}\right)$ 의 최솟값은?

① 16

② 18

③ 19

④ 25

⑤ 27

해설

$$\begin{aligned}(2x+y)\left(\frac{8}{x}+\frac{1}{y}\right) &= 17 + \frac{2x}{y} + \frac{8y}{x} \\ &\geq 17 + 2\sqrt{\frac{2x}{y} \cdot \frac{8y}{x}} \\ &= 17 + 8 = 25\end{aligned}$$

따라서 $\frac{2x}{y} = \frac{8y}{x}$ 일 때 최솟값은 25 이다.

10. $a_5 = 27$, $a_{11} = 15$ 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 처음으로 음수가 되는 항은?

① a_{16}

② a_{17}

③ a_{18}

④ a_{19}

⑤ a_{20}

해설

$$a_5 = a + 4d = 27$$

$$a_{11} = a + 10d = 15$$

연립하여 풀면 $d = -2$, $a = 35$

$$\therefore a_n = 35 + (n - 1) \times (-2) = -2n + 37$$

$-2n + 37 < 0$ 인 정수 n 의 최솟값을 구하면

$$37 < 2n, \quad 18.5 < n$$

$$\therefore n = 19$$

$\therefore \{a_n\}$ 에서 처음으로 음수가 되는 항은 a_{19} 이다.

11. 등비수열 $\sqrt{2}+1, 1, \sqrt{2}-1, 3-2\sqrt{2}, \dots$ 의 일반항을 a_n 이라 할 때, a_{100} 의 값은?

- ① $(\sqrt{2}-1)^{98}$ ② $(\sqrt{2}-1)^{99}$ ③ $(\sqrt{2}-1)^{100}$
④ $\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^{90}$ ⑤ $2(\sqrt{2}-1)^{90}$

해설

$$\text{공비를 } r \text{이라 하면 } r = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{\sqrt{2}-1}{1} = \sqrt{2}-1$$

$$\therefore a_n = (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)^{n-1}$$

$$\begin{aligned}\therefore a_{100} &= (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)^{99} \\ &= (\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)^{98} \\ &= (\sqrt{2}-1)^{98}\end{aligned}$$

12. 다음 수열의 첫째항부터 제 10항까지의 합은?

1 · 1 · 3, 2 · 3 · 5, 3 · 5 · 7, 4 · 7 · 9, ...

- ① 10050
- ② 11000
- ③ 11055
- ④ 12045
- ⑤ 12100

해설

주어진 수열의 일반항은 $n(2n-1)(2n+1) = 4n^3 - n$ 이므로
첫째항부터 제 10항까지의 합은

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(4k^3 - k) &= 4 \cdot \left(\frac{10 \times 11}{2}\right)^2 - \frac{10 \times 11}{2} \\ &= 12100 - 55 = 12045\end{aligned}$$

13. $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)}$ 의 값은?

- ①

$\frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)}$
- ②

$\frac{n(3n+5)}{4(2n+1)(n+2)}$
- ③

$\frac{n(3n+5)}{(n+1)(n+2)}$
- ④

$\frac{n(3n+4)}{4(n+1)(n+2)}$
- ⑤

$\frac{n(3n+4)}{2(n+1)(n+2)}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n(n+2)} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+2)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) \right\} \\ &+ \cdots + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{n(3n+5)}{4(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

14. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음과 같이 정의될 때, a_{10} 의 값은?

$a_1 = 4, a_2 = 6, a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2} (n = 1, 2, 3, \dots)$

- ① $4\left(\frac{3}{2}\right)^8$
- ② $4\left(\frac{3}{2}\right)^9$
- ③ $4\left(\frac{3}{2}\right)^{10}$
- ④ $4\left(\frac{3}{2}\right)^{11}$
- ⑤ $4\left(\frac{3}{2}\right)^{12}$

해설

$a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2}$ 에서 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

즉, 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

이때, $a_1 = 4$ 이고 공비 r 은 $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{2}$ 이므로

$a_n = 4\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore a_{10} = 4\left(\frac{3}{2}\right)^9$

15. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n + 3 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_7 의 값은?

① 216 ② 317 ③ 365 ④ 509 ⑤ 1021

해설

$$a_{n+1} = 2a_n + 3 \text{ 에서}$$

$$a_{n+1} + 3 = 2(a_n + 3)$$

이때, 수열 $\{a_n + 3\}$ 은 첫째항이 $a_1 + 3$, 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_n + 3 = (a_1 + 3) \cdot 2^{n-1} = 5 \cdot 2^{n-1}$$

따라서, $a_n = -3 + 5 \cdot 2^{n-1}$ 이므로

$$a_7 = -3 + 5 \cdot 2^6 = 317$$

16. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2 + a_n}$ (단, $n = 1, 2, 3, \dots$) 과 같이 정의되는 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_n = \frac{1}{63}$ 을 만족하는 n 의 값은?

① 9 ② 8 ③ 7 ④ 6 ⑤ 5

해설

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2 + a_n} \text{ 에서 양변의 역수를 취하면 } \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2}{a_n} + 1$$

$$\text{이때, } \frac{1}{a_n} = b_n \text{ 이라 하면 } b_1 = 1, b_{n+1} = 2b_n + 1$$

$$\text{그러면, } b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1) \text{ 이므로}$$

$$b_n + 1 = (b_1 + 1) \cdot 2^{n-1} = 2^n \quad \therefore b_n = 2^n - 1$$

$$\text{따라서 } a_n = \frac{1}{2^n - 1} \text{ 이므로 } a_n = \frac{1}{2^n - 1} = \frac{1}{63} \text{ 에서 } n = 6 \text{ 이다.}$$

17. 높이가 h 인 탑을 쌓으려고 한다. 첫 번째 날에는 탑 높이의 절반을 쌓고, 두 번째 날에는 전날 쌓은 높이의 절반을 쌓는다. 이와 같은 방법으로 10일 동안 탑을 쌓았더니 탑의 높이가 $a \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$ 이 되었을 때, $\frac{a}{h}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

n 번째 날의 탑의 높이를 a_n 이라 하면 $(n+1)$ 째 날 탑의 높이는 전날까지 쌓은 높이 a_n 과 그 높이의 절반인 $\frac{1}{2}a_n$ 의 합이므로

$$a_1 = \frac{h}{2} \text{이고, } a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}a_n = \frac{3}{2}a_n$$

$$\therefore a_n = \frac{h}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_{10} = \frac{h}{2} \left(\frac{3}{2}\right)^9 = \frac{h}{3} \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$$

$$\therefore, a = \frac{h}{3} \text{이므로 } \frac{a}{h} = \frac{1}{3}$$

18. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 4x - (2n - 1)(2n + 1) = 0$ 의 두 근 α_n, β_n 에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} \right)$ 의 값은?

- ① $\frac{11}{21}$ ② $\frac{20}{21}$ ③ $\frac{31}{21}$ ④ $\frac{40}{21}$ ⑤ $\frac{50}{21}$

해설

$$\begin{aligned} (\text{준 식}) &= \sum_{n=1}^{10} \frac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_n \cdot \beta_n} \\ &= \sum_{n=1}^{10} \frac{-4}{-(2n-1)(2n+1)} \\ &= 4 \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{10} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{21} \right) = \frac{40}{21} \end{aligned}$$

19. 분식집에서 1주년 개업기념을 맞이하여 특별히 학생들의 기호에 맞추어 새로운 메뉴판을 제작하기로 했다. 다음 중 집합인 것은?
- ① 가격이 2000 원인 음식
 - ② 여학생들이 좋아하는 음식
 - ③ 남학생들이 좋아하는 음식
 - ④ 가격이 비교적 싼 음식
 - ⑤ 맛있는 음식

메뉴	가격
라면	2000 원
김밥	1000 원
볶음밥	2000 원
우동	2000 원
순대	2000 원
떡볶이	1000 원
냉면	2000 원

해설

- ① 가격이 2000 원으로 명확하게 기준이 정해져 있으므로 집합이다.
- ②, ③ 남학생과 여학생에 대한 정보가 없고 ‘좋아하는’이라는 단어는 개인에 따라 그 기준이 다르므로 집합이 아니다.
- ④ ‘비교적 싼’이라는 단어는 그 기준이 명확하지 않으므로 집합이 아니다.
- ⑤ ‘맛있는’이라는 단어는 개인에 따라 그 기준이 다르므로 집합이 아니다.

20. 다음 중 공집합인 것을 모두 고르면? (정답 2개)

- ① {0}
- ② $\emptyset$
- ③ $\{x|x \leq 2 \text{인 짝수}\}$
- ④ $\{x|1 < x < 2 \text{인 자연수}\}$
- ⑤ $\{\emptyset\}$

해설

- ③ $\{x|x \leq 2 \text{인 짝수}\} = \{2\}$
- ④ 1 과 2 사이에는 자연수가 없으므로 $\{x|1 < x < 2 \text{인 자연수}\} = \emptyset$

21. 다음 중 유한집합이 아닌 것은?

- ① $\{x \mid x \text{는 } 10 \text{의 약수}\}$
- ② $\{x \mid x \text{는 } 10 \text{보다 작은 홀수}\}$
- ③ $\{x \mid x \text{는 } 5 \text{보다 큰 자연수}\}$
- ④ $\{x \mid x \text{는 } 30 \text{보다 작은 } 5 \text{의 배수}\}$
- ⑤ $\{1, 2, 3, \dots, 49, 50\}$

해설

③ $\{6, 7, 8, 9, \dots\} \Rightarrow$ 무한집합

22. 다음은 모든 자연수 n 에 대하여 $2^{n+1} > n(n+1) + 1$ 이 성립함을 증명한 것이다.

(i) $n = 1$ 일 때, $4 > 2 + 1$ 이므로 성립한다.
(ii) $n = k(k \geq 2)$ 일 때,
 $2^{k+1} > \boxed{(가)} + 1 \cdots \textcircled{가}$ 이 성립한다고 가정하자. $\textcircled{가}$ 의 양변에 2를 곱하면
 $2^{k+2} > 2(k^2 + k + 1)$
이때, $2(k^2 + k + 1) - \boxed{(나)} = k^2 - k - 1$
 $k \geq 2$ 일 때, $k^2 - k - 1 \boxed{(다)} 0$ 이므로
 $2^{k+2} > 2(k^2 + k + 1) > \boxed{(나)}$
 $\therefore 2^{k+2} > \boxed{(나)}$
따라서 $n = k + 1$ 일 때에도 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여
 $2^{n+1} > n(n+1) + 1$ 이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은?

- ① (가) : $k(k-1)$, (나) : $(k+1)(k+2)$, (다) : $<$
- ② (가) : $k(k+1)$, (나) : $(k+1)(k+2)$, (다) : $>$
- ③ (가) : $k(k-1)$, (나) : $\{(k+1)(k+2)+1\}$, (다) : $>$
- ④ (가) : $k(k-1)$, (나) : $\{(k+1)(k+2)+1\}$, (다) : $<$
- ⑤ (가) : $k(k+1)$, (나) : $\{(k+1)(k+2)+1\}$, (다) : $>$

해설

(ii) $n = k(k \geq 2)$ 일 때,
 $2^{k+1} > \boxed{k(k+1)} + 1 \cdots \textcircled{가}$ 이 성립한다고 가정하자. $\textcircled{가}$ 의 양변에 2를 곱하면
 $2^{k+2} > 2(k^2 + k + 1)$
이때, $2(k^2 + k + 1) - \boxed{\{(k+1)(k+2)+1\}} = k^2 - k - 1$
 $k \geq 2$ 일 때, $k^2 - k - 1 \boxed{>} 0$ 이므로
 $2^{k+2} > 2(k^2 + k + 1) > \boxed{\{(k+1)(k+2)+1\}}$
 $\therefore 2^{k+2} > \boxed{\{(k+1)(k+2)+1\}}$
따라서 $n = k + 1$ 일 때에도 성립한다.
(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여
 $2^{n+1} > n(n+1) + 1$ 이 성립한다.