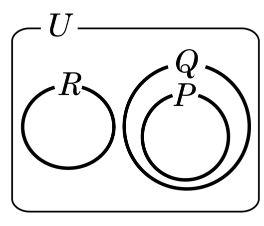
1. 집합 $A = \{x | 1 \le x \le 10,\ x$는 자연수$\}$의 부분집합 중에서 홀수는 반드시 포함하고, 4의 배수는 포함하지 않는 부분집합의 개수는?

① 4개 ② 8개 ③ 16개 ④ 32개 ⑤ 64개

해설

$2^{10-5-2} = 2^3 = 8$(개)

2. 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라고 할 때, 이들 사이의 포함 관계는 다음 그림과 같다. 다음 명제 중 거짓인 것은?



① $r \to \sim q$　　② $r \to \sim p$　　③ $p \to \sim r$

④ $\sim q \to \sim p$　　⑤ $p \to \sim q$

해설

명제의 참, 거짓은 각각의 조건을 만족하는 집합의 포함 관계로 판별할 수 있다.

① $R \subset Q^c$ 이므로 $r \to \sim q$ 는 참이다.

② $R \subset P^c$ 이므로 $r \to \sim p$ 는 참이다.

③ $P \subset R^c$ 이므로 $p \to \sim r$ 는 참이다.

④ $Q^c \subset P^c$ 이므로 $\sim q \to \sim p$ 는 참이다.

⑤ $P \not\subset Q^c$ 이므로 $p \to \sim q$ 는 거짓이다.

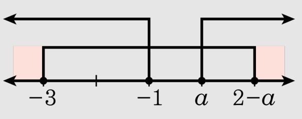
3. 두 조건 $p : -3 \le x \le 2-a$, $q : x \le -1$ 또는 $x \ge a$에 대하여 명제 $p \to \sim q$의 역이 참이 되게 하는 실수 a의 범위를 구하면?

① $-1 \le a \le 0$　② $-1 \le a \le 1$　③ $-1 \le a \le 2$

④ $-1 \le a \le 3$　⑤ $-1 \le a \le 5$

해설

역은 $\sim q \to p$이고 대우는 $\sim p \to q$ (참) $\Leftrightarrow P^c \subset Q$



그림에서 보면 색칠한 부분이 P^c 이고 $P^c \subset Q$ 이 성립하려면

$\therefore -1 \le a \le 2-a$ $\therefore$ $-1 \le a \le 1$

4. 전체집합 U 의 세 부분집합 $P,\ Q,\ R$ 는 각각 세 조건 $p,\ q,\ r$ 를 만족하는 집합이다. 두 명제 $\sim p \rightarrow q$, $r \rightarrow \sim q$ 가 모두 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \subset Q$　　② $Q \subset R$　　③ $P^c \subset R^c$

④ $P \subset Q^c$　　⑤ $R^c \subset P$

해설

$\sim p \rightarrow q$ 가 참이므로 $P^c \subset Q$
$r \rightarrow \sim q$ 가 참이므로 $R \subset Q^c$
또, $\sim p \rightarrow q$ 와 $r \rightarrow \sim q$ 의 대우인 $q \rightarrow \sim r$ 가 참이므로 $\sim p \rightarrow \sim r$ 가 참이다.
$\therefore\ P^c \subset R^c$
따라서, 항상 옳은 것은 ③이다.

5. $a > 0,\ b > 0$ 일 때, $(2a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{8}{b}\right)$의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$(2a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{8}{b}\right) = 10 + \frac{b}{a} + \frac{16a}{b}$

산술기하조건을 사용하면

$\frac{b}{a} + \frac{16a}{b} \geq 2\sqrt{\frac{b}{a} \times \frac{16a}{b}} = 8$

$\therefore$ 최솟값은 $10 + 8 = 18$

6. 집합 $A = \{x \mid x\text{는 } 4\text{의 약수}\}$ 의 부분집합을 X 라고 하자. 집합 X 의 모든 원소들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

$A = \{1,\ 2,\ 4\}$

$X : \varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{4\},\ \{1,\ 2\},\ \{1,\ 4\},$
$\{2,\ 4\},\ \{1,\ 2,\ 4\}$

집합 X 의 원소들의 합에는 1, 2, 4 가 각각 4 번씩 더해지므로

$(1+2+4)\times 4 = 28$

7. 집합 $A = \{x \mid 15 < x < 30,\ x = 3n + 2(n\text{은 자연수})\}$라고 할 때, 적어도 한 개의 짝수를 원소로 갖는 부분집합의 개수는?

① 8 개　② 16 개　③ 24 개　④ 32 개　⑤ 40 개

해설

$\mathrm{A} = \{17,\ 20,\ 23,\ 26,\ 29\}$이므로 집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^5 = 32$ (개) 이고, 이 중에서 짝수를 원소로 하나도 갖지 않는 부분집합은 원소 17, 23, 29 로 만든 부분집합이므로 $2^3 = 8$ (개) 이다.

$\therefore\ 32 - 8 = 24$ (개)

8. 다음 두 조건을 만족하는 집합 A 의 부분집합의 개수는?

$A \cap \{2,\ 3,\ 4,\ 5\} = \{2,\ 5\}$
$A \cup \{2,\ 3,\ 4,\ 5\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

① 6개 ② 7개 ③ 8개 ④ 9개 ⑤ 10개

해설

$A \cap \{2,\ 3,\ 4,\ 5\} = \{2,\ 5\}$에서 집합 A는 원소 2, 5를 포함하고, 원소 3, 4는 포함하지 않는다.
$A \cup \{2,\ 3,\ 4,\ 5\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에서 집합 A는 원소 1을 포함한다.
$\therefore\ A = \{1,\ 3,\ 4\}$
따라서 집합 A의 부분집합의 개수는 $2^3 = 8$ (개)이다.

9. 은지네반 35 명의 학생의 생활습관 조사를 하였다. 11 시 이전에 자는 학생이 18 명이고, 아침밥을 매일 먹는 학생이 22 명이었다. 이때, 11 시 이전에 자고 아침밥을 매일 먹는 최대 인원수를 a, 최소 인원수를 b 라고 할 때, a, b 를 각각 구하여라.

▶ 답 :

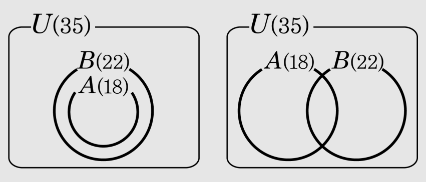
▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 18$

▷ 정답 : $b = 5$

해설

11 시 이전에 자는 학생의 집합을 A, 아침밥을 매일 먹는 학생의 집합을 B 라고 할 때, 교집합의 개수의 최대, 최소는 다음 벤 다이어그램을 보면 알 수 있다.



11 시 이전에 자는 학생 18 명 모두 아침밥을 먹는다고 가정했을 때, 최대인원수는 18 명이다. 35 명의 학생 중 적어도 한 명은 11 시 이전에 자거나 아침밥을 먹는다고 가정하면, 최소 인원수는 $18 + 22 - 35 = 5$ (명) 이다.

10. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 연산 $\star$ 를 $A \star B = (A - B^c) \cup (B^c - A)$ 로 정의할 때, $(A \star B) \star A$ 와 같은 집합은?

① A ② B ③ $A \cap B$ ④ $A \cup B$ ⑤ $A - B$

해설

$A \star B = (A - B^c) \cup (B^c - A)$

$\qquad = (A \cap B) \cup (B^c \cap A^c)$ 이므로

$(A \star B) \star A$

$= [\{(A \cap B) \cup (B^c \cap A^c)\} - A^c]$

$\quad \cup [A^c - \{(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)\}]$

$= [\{(A \cap B) \cup (A \cup B)^c\} \cap A]$

$\quad \cup [A^c \cap \{(A \cap B)^c \cap (A \cup B)\}]$

$= [\{(A \cap B) \cap A\} \cup \{A \cap (A \cup B)^c\}]$

$\quad \cup [\{A^c \cap (A \cap B)^c\} \cap (A \cup B)]$

$= [(A \cap B) \cup \{A \cap A^c \cap B^c\}] \cup [\{A \cup (A \cap B)\}^c \cap (A \cup B)]$

$= (A \cap B) \cup \{A^c \cap (A \cup B)\}$

$= (A \cap B) \cup \{(A^c \cap A) \cup (A^c \cap B)\}$

$= (A \cap B) \cup (A^c \cap B) = (A \cup A^c) \cap B = B$

11. 다음 중에서 p는 q이기 위한 필요조건이고 충분조건은 아닌 것을 고르면? (단, 모든 문자는 실수)

① $p : a > 3,\ q : a^2 > 9$

② $p : a^2 = ab,\ q : a = b$

③ $p : |a| < |b|,\ q : a < b$

④ $p : |x-1| = 2,\ q : x^2 = -2$

⑤ $p : x = 1$ 이고 $y = 1,\ q : x + y = 2$ 이고 $xy = 1$

해설

① 충분조건
③ 아무런 조건관계가 아니다.
④ 아무런 조건관계가 아니다. 진리집합을 구해보면 $P = \{-1,\ 3\}$, $Q = \phi$ 에서 $P \supset Q$ 관계로 보아 필요조건이라고 하지 않도록 주의하자.
⑤ 필요충분조건

12. 다음 중 p는 q이기 위한 충분조건인 것은?

① $p : x = 1$ 이고 $y = 1$, $q : x + y = 2$ 이고 $xy = 1$

② $p : |x - 1| = 2$, $q : x^2 - 2x + 3 = 0$

③ $p : a > 3$, $q : a^2 > 9$

④ $p : a^2 = ab$, $q : a = b$

⑤ $p : |a| < |b|$, $q : a < b$

해설

$p \rightarrow q$ 이면 (진리집합 P)$\subset$ (진리집합 Q)
① $P : x = 1,\ y = 1$, $Q : x = 1\ \ y = 1 \Rightarrow$ 필요충분조건
② $P : x = 3$ 또는 $x = -1$, $Q : x = 1 \pm \sqrt{2}i \Rightarrow$ 서로소
③ $P : a > 3$, $Q : a < -3$ 또는 $a > 3 \Rightarrow$ 충분조건
④ $P : a = 0$ 또는 $a = b$, $Q : a = b \Rightarrow$ 필요조건
⑤ $p \nrightarrow q$, $q \rightarrow p$ (반례 : $a = 2$, $b = -3$)

13. $x>1$일 때, $2x+\frac{2}{x-1}$는 $x=a$일 때, 최솟값 b를 갖는다. 이 때, $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$2x+\frac{2}{x-1}=2\left(x+\frac{1}{x-1}\right)$

$$\begin{aligned} x+\frac{1}{x-1} &= (x-1)+\frac{1}{x-1}+1 \\ &\geq 2\sqrt{(x-1)\cdot\frac{1}{x-1}}+1 \\ &= 2+1=3 \end{aligned}$$

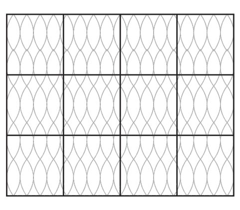
$\therefore\ 2\left(x+\frac{1}{x-1}\right)\geq 3\cdot 2=6$

최솟값은 $x-1=\frac{1}{x-1}$ 일 때 6이다

$\therefore$ 즉, $x=2$ 일 때 최솟값은 6이다.

$\therefore a+b=2+6=8$

14. 어떤 농부가 길이 $120\,\mathrm{m}$ 인 철망을 가지고 아래 그림과 같이 열두 개의 작은 직사각형 모양으로 이루어진 가축의 우리를 만들려고 한다. 전체 우리의 최대넓이를 구하여라.



① $120\,\mathrm{m}^2$　② $180\,\mathrm{m}^2$　③ $240\,\mathrm{m}^2$

④ $300\,\mathrm{m}^2$　⑤ $360\,\mathrm{m}^2$

해설

전체의 가로를 x, 세로를 y라 하면

$4x+5y=120$

넓이 : xy

$4x+5y=120\geq 2\sqrt{4x\cdot 5y}$

$60\geq \sqrt{20xy}$, $3600\geq 20xy$

$\therefore 180\geq xy$

따라서 넓이의 최대값은 180

해설

$$\begin{aligned} xy &= x\times\frac{1}{5}(120-4x) \\ &= -\frac{4}{5}x^2+24x \\ &= -\frac{4}{5}(x^2-30x+225-225) \\ &= -\frac{4}{5}(x-15)^2+180 \end{aligned}$$

$x=15(\mathrm{m})$, $y=12(\mathrm{m})$ 일 때,

최대넓이는 $180\,\mathrm{m}^2$

15. 실수 x, y가 $x^2+y^2=5$를 만족할 때, $x+2y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. 이 때, $M-m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

코시-슈바르쯔의 부등식에 의해

$(1^2+2^2)(x^2+y^2) \geq (x+2y)^2$

$x^2+y^2=5$ 이므로

$25 \geq (x+2y)^2$

$\therefore\ -5 \leq x+2y \leq 5$

$\therefore\ M=5,\ m=-5$

$\therefore\ M-m=5-(-5)=10$

16. 다음은 명제 「x, y가 정수일 때 xy가 짝수이면 x, y 중 적어도 하나는 짝수이다.」를 증명하는 과정이다.

> 주어진 명제의 결론을 부정하여 (가) 이면 $x = 2m+1, y =$ (나)(m, n 은 정수) 이라 할 수 있다. 이 때, $xy = 2(mn+m+n)+1$ 이므로 xy 는 홀수이다. 이것은 가정에 모순이므로 주어진 명제는 참이다.

위의 과정에서 (가), (나) 에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

① x 또는 y 가 짝수, $2n$

② x , y 중 하나만 짝수, $2n$

③ x , y 중 하나만 홀수, $2n+1$

④ x , y 모두 홀수, $2n+1$

⑤ x , y 모두 짝수, $2n+1$

해설

주어진 명제의 결론을 부정하여 x, y가 모두 (가): 홀수이면 $x = 2m+1$, (나) : $y = 2n+1$ (m, n은 정수) 이라 할 수 있다. 이 때, $xy = 2(2mn+m+n)+1$ 이므로 xy는 홀수이다. 이것은 가정에 모순이므로 주어진 명제는 참이다.

17. 두 조건 $p : x-2 \neq 0$, $q : x^2-ax+2 \neq 0$에서 $q \rightarrow p$가 참일 때, a의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$q \Rightarrow p$가 참이면, 대우인 $\sim p \Rightarrow \sim q$ 도 참이다.
$x-2=0 \Rightarrow x^2-ax+2=0 \therefore a=3$

18. 전체집합 U에 대하여 두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하고, 명제 'p 이면 q 이다.' 가 거짓임을 보이기 위해 반례를 찾으려고 한다. 다음 중 그 반례가 속하는 집합은?

① $P-Q$ ② $Q-P$ ③ $P \cap Q$
④ $P^c \cap Q^c$ ⑤ $Q \cup P^c$

해설

명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓이면 $P \not\subset Q$ 이고, 반례는 조건 p 는 만족하지만 조건 q 는 만족하지 않는 것이므로 $x \in P$ 이고 $x \notin Q$ 인 x 가 속하는 집합을 찾으면 된다. 즉, 반례는 집합 $P-Q$ 의 원소 중에서 찾으면 된다.

19. 두 집합 $A = \{0,\ 1\}$, $B = \{1,\ 2,\ 3\}$ 에 대하여 집합 $C = \{x \mid x = a \times b,\ a \in A,\ b \in B\}$ 이다. 이때, 집합 C 를 원소나열법으로 나타낸 것은?

① $\{0\}$　② $\{0,\ 1\}$　③ $\{0,\ 1,\ 2\}$　④ $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$　⑤ $\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

해설

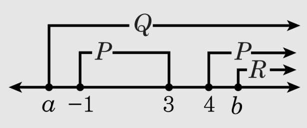
$0 \times 1 = 0,\ 0 \times 2 = 0, 0 \times 3 = 0,\ 1 \times 1 = 1,\ 1 \times 2 = 2,\ 1 \times 3 = 3$ 이므로 $C = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ 이다.

20. $-1 \le x \le 3$ 또는 $x \ge 4$이기 위한 필요조건은 $x \ge a$ 이고, 충분조건은 $x \ge b$일 때, a의 최댓값과 b의 최솟값의 합을 구하면?

① -1　　② 0　　③ 1　　④ 2　　⑤ 3

해설

$P = \{x| \ -1 \le x \le 3 \ or \ \ x \ge 4\}$, $Q = \{x| \ x \ge a\}$, $R = \{x| \ x \ge b\}$
이라 하면 $P \subset Q$, $R \subset P$



$a \le -1, \quad b \ge 4$

$\therefore -1 + 4 = 3$