1. 다음 무리식의 값이 실수가 되는 x 의 범위를 구하면?

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$$

① $1 < x < 3$
② $1 \le x \le 3$
③ $x > 3$
④ $x < 1$
⑤ $x \le 1$ 또는 $x \ge 3$

해설

$x-1 \ge 0,\ x \ge 1 \cdots$ ㉠
$3-x \ge 0,\ x \le 3 \cdots$ ㉡
$\therefore$ ㉠, ㉡을 모두 만족하는 범위는 $1 \le x \le 3$

2. 다음 중 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$인 관계가 성립될 수 <u>없는</u> 경우는?

① $a > 0,\ b > 0$　② $a > 0,\ b < 0$　③ $a < 0,\ b > 0$

④ $a < 0,\ b < 0$　⑤ $ab < 0$

해설

$a < 0,\ b < 0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$

3. $a>0,\ x=a-\dfrac{1}{a}$ 일 때, $\sqrt{x^2+4}-x$를 a로 나타내면?

① $\dfrac{2}{a}$ ② $-\dfrac{2}{a}$ ③ a ④ $2a$ ⑤ $-2a$

해설

$\sqrt{x^2+4}=\sqrt{(a-\dfrac{1}{a})^2+4}=\sqrt{(a+\dfrac{1}{a})^2}$

그런데 $a>0$이므로 $\sqrt{x^2+4}=a+\dfrac{1}{a}$

$\therefore\ \sqrt{x^2+4}-x=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)-\left(a-\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{2}{a}$

4. $x = 2 + \sqrt{3},\ y = 2 - \sqrt{3}$일 때, $\frac{x}{y} + \frac{y}{x}$의 값은?

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

해설

$x = 2 + \sqrt{3},\ y = 2 - \sqrt{3}$ 일 때,

$xy = 4 - 3 = 1,\ x + y = 4$

$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y^2}{xy} = \frac{14}{1} = 14$

$(\therefore x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy)$

5. $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 일 때 $A \subset X \subset B$인 집합 X중에서 집합 B의 진부분집합은 모두 몇 개인가?

① 32 개 ② 16 개 ③ 8 개 ④ 7 개 ⑤ 6 개

해설

1, 2를 반드시 포함하는 B 의 부분집합의 수에서 B를 뺀 것과 같다.

$\therefore 2^{5-2} - 1 = 7$(개)

6. 전체집합 U 의 부분집합 A 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $B \cap A^c = A - B$　② $A \cap U = U$

③ $A^c = U - A$　④ $A \cap \varnothing = U$

⑤ $A \cup U = A$

해설

① $B \cap A^c = B - A$

② $A \cap U = A$

④ $A \cap \varnothing = \varnothing$

⑤ $A \cup U = U$

7. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 두 부분집합 $A = \{2, 3, 4\}, B = \{1, 3, 5\}$ 에 대하여 $A \cap B^c$ 은?

① $\{1\}$ ② $\{2\}$ ③ $\{4\}$ ④ $\{1, 2\}$ ⑤ $\{2, 4\}$

해설

$A \cap B^c = A - B = \{2, 4\}$ 이다.

8. 다음 (가), (나)에 들어갈 말을 알맞게 나열한 것은?

• $1 < x \le 3$ 은 $x > -2$ 이기 위한 (가) 조건이다. • $2x = 4$ 는 $x^2 - 4x + 4 = 0$ 이기 위한 (나) 조건이다.

① 필요, 필요 ② 필요, 충분

③ 충분, 충분 ④ 충분, 필요

⑤ 충분, 필요충분

해설

$P = \{x \mid 1 < x \le 3\}$,
$Q = \{x \mid x > -2\}$ 라고 하면
$P \subset Q$, $\therefore$ 충분조건
$R = \{x \mid 2x = 4\} = \{2\}$,
$S = \{x \mid x^2 - 4x + 4 = 0\} = \{2\}$ 라고 하면
$R = S$, $\therefore$ 필요충분조건

9. 두 집합 $X = \{-2, -1, 0, 1\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 상수함수의 개수를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 집합 $X = \{-2, -1, 0, 1\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여
X 에서 Y 로의 상수함수는
$f(x) = 1$, $f(x) = 2$, $f(3) = 3$ 의 3 개가 있다.

10. 함수 $f(x) = kx + 1$ 에 대하여 $f^{-1} = f$ 가 성립할 때, 상수 k 의 값은?
(단, f^{-1} 는 f 의 역함수)

① 4 ② 3 ③ 2 ④ -1 ⑤ -2

해설

f^{-1} 이므로 $f \circ f = \mathrm{I}$
$(f \circ f)(x) = x$ 에서
$f(f(x)) = f(kx+1) = k(kx+1) + 1 = k^2x + k + 1 = x$
$\therefore\ k^2 = 1,\ k + 1 = 0$ 따라서 $k = -1$

11. $\dfrac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$을 간단히 하여라.

① $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}$ ② $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}$ ③ $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$

④ $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$

해설

$$\begin{aligned}&\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}\\&=\frac{(1-\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}\\&=\frac{2(1+\sqrt{3})}{(1+2+2\sqrt{2})-3}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

12. 다음 함수 중 그 그래프를 평행이동시켰을 때, 함수 $y = \dfrac{2x^2}{x+1}$ 의 그래프와 일치하는 것은?

① $y = \dfrac{1}{x}$　② $y = \dfrac{2}{x}$　③ $y = x + \dfrac{1}{x}$

④ $y = x + \dfrac{2}{x}$　⑤ $y = 2x + \dfrac{2}{x}$

해설

$2x^2 = (x+1)(2x-2) + 2$ 이므로

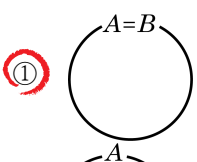
$y = \dfrac{2x^2}{x+1} = (2x-2) + \dfrac{2}{x+1}$

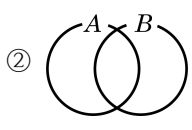
$= 2(x+1) + \dfrac{2}{x+1} - 4$

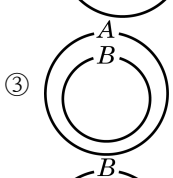
$\therefore\ y + 4 = 2(x+1) + \dfrac{2}{x+1}$

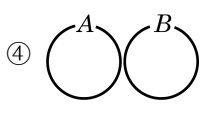
이것은 $y = 2x + \dfrac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축 방향으로 -1, y축 방향으로 -4 만큼 이동한 것이다.

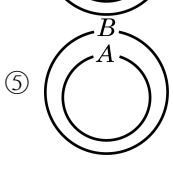
13. $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 일 때, 두 집합 A, B 를 벤 다이어그램으로 바르게 나타낸 것은?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

$A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이면 $A = B$ 이다. 두 집합 A, B 의 원소가 모두 같다.

14. 다음 보기에서 참인 명제의 개수는?

보기

㉠ $A \subset B$ 이면 $A - B = \varnothing$ 이다.

㉡ $A \subset (B \cup C)$ 이면 $A \subset B$ 또는 $A \subset C$ 이다.

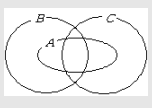
㉢ 4 의 배수는 12 의 배수이다.

㉣ 12 의 배수는 4 의 배수이다.

㉤ a, b 가 자연수일 때, a, b 가 홀수이면 $a + b$ 는 짝수이다.

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉡ (반례) 

이면 $A \subset (B \cup C)$ 이지만 $A \not\subset B$ 이고 $A \not\subset C$ 이므로 거짓이다.

㉢ (반례) 8 은 4 의 배수이지만 12 의 배수는 아니므로 거짓이다.

따라서 참인 명제는 3개이다.

15. $a > b,\ x > y$일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $(a+b)(x+y) > 2(ax+by)$

② $(a+b)(x+y) < 2(ax+by)$

③ $(a+b)(x+y) \geq 2(ax+by)$

④ $(a+b)(x+y) \leq 2(ax+by)$

⑤ $(a+b)(x+y) = 2(ax+by)$

해설

$(a+b)(x+y) - 2(ax+by)$
$= ay + bx - ax - by$
$= a(y-x) - b(y-x)$
$= (a-b)(y-x)$

그런데 $a-b > 0,\ y-x < 0$
$\therefore (a+b)(x+y) < 2(ax+by)$

16. $\frac{3}{a}+\frac{3}{b}=\frac{16}{a+b}$ 일 때, $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{8}{3}$ ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{14}{3}$ ④ $\frac{16}{3}$ ⑤ $\frac{17}{3}$

해설

$\frac{3}{a}+\frac{3}{b}=\frac{16}{a+b}$, $\frac{3(a+b)}{ab}=\frac{16}{a+b}$

$3(a+b)^2=16ab \quad \therefore\ 3a^2-10ab+3b^2=0$

$(3a-b)(a-3b)=0 \quad \therefore\ \frac{b}{a}=3,\ \frac{1}{3}$

$\therefore\ \frac{b}{a}+\frac{a}{b}=3+\frac{1}{3}=\frac{10}{3}$

17. $4x^2-4xy+y^2=0$일 때, $\dfrac{8x^2-xy+3y^2}{x^2+2y^2}$의 값을 구하면? (단, x, y는 0이 아니다.)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$4x^2-4xy+y^2=0,\ (2x-y)^2=0$에서 $2x-y=0$

$\therefore\ y=2x$

$$\frac{8x^2-xy+3y^2}{x^2+2y^2}$$

$$=\frac{8x^2-x\cdot 2x+3\cdot 4x^2}{x^2+8x^2}$$

$$=\frac{18x^2}{9x^2}=2$$

18. 두 함수 $y=\dfrac{5x+1}{3x-2}$, $y=\dfrac{ax+3}{2x+b}$ 의 그래프의 점근선이 일치할 때, $a+b$ 의 값은?

① $\dfrac{4}{3}$ ② $\dfrac{5}{3}$ ③ 2 ④ 3 ⑤ $\dfrac{7}{2}$

해설

$y=\dfrac{5x+1}{3x-2}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=\dfrac{2}{3}$, $y=\dfrac{5}{3}$ 이고,

$y=\dfrac{ax+3}{2x+b}$ 의 그래프의 점근선의 방정식은

$x=-\dfrac{b}{2}$, $y=\dfrac{a}{2}$ 이다.

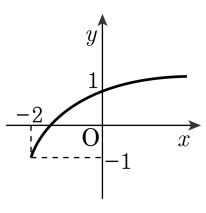
이 때, 두 그래프의 점근선이 일치하므로

$\dfrac{2}{3}=-\dfrac{b}{2}$, $\dfrac{5}{3}=\dfrac{a}{2}$

$\therefore\ a=\dfrac{10}{3}$, $b=-\dfrac{4}{3}$

$\therefore\ a+b=2$

19. 함수 $y = a\sqrt{x+b} + c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이 그래프와 x축의 교점의 좌표는? (단, a, b, c는 상수)



① $\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$ ② $\left(-\frac{4}{3},\ 0\right)$
③ $\left(-\frac{5}{3},\ 0\right)$ ④ $(-\sqrt{2},\ 0)$
⑤ $(-\sqrt{3},\ 0)$

해설

함수 $y = a\sqrt{x+b} + c$의 그래프는
함수 $y = a\sqrt{x}$의 그래프를
x축의 방향으로 $-b$ 만큼, y축의 방향으로
c만큼 평행 이동시킨 것이므로
$b = 2$, $c = -1$
$\therefore\ y = a\sqrt{x+b} + c = a\sqrt{x+2} - 1$
한편, 이 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지나므로
$1 = a\sqrt{0+2} - 1$
$\therefore\ a = \sqrt{2}$
따라서, 함수 $y = \sqrt{2}\sqrt{x+2} - 1$의 그래프와
x축의 교점의 x좌표를 구하면
$0 = \sqrt{2}\sqrt{x+2} - 1$

$$\sqrt{x+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x + 2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ x = -\frac{3}{2}$$

20. 무리수 $\sqrt{k}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라 할 때, $a^3+b^3=9ab$을 만족하는 양의 정수 k를 구하면?

① 6　② 4　③ 2　④ 1　⑤ 11

해설

$\sqrt{k}=a+b \quad \therefore\ b=\sqrt{k}-a$

$a^3+b^3=9ab, \quad a^3+(\sqrt{k}-a)^3=9a(\sqrt{k}-a)$

$\therefore\ 3a(3a-k)+\sqrt{k}(3a^2-9a+k)=0$

$a,\ k$가 정수이므로

$3a(3a-k)=0, \quad 3a^2-9a+k=0$

연립하여 풀면

$\therefore a=2, \quad k=6$

21. $x = \sqrt{3-\sqrt{8}}$일 때 $\dfrac{x^3+x^2-3x+6}{x^4+2x^3+2x+9}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

해설

$x = \sqrt{3-\sqrt{8}} = \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$ 에서

$x+1 = \sqrt{2} \rightarrow x^2+2x-1=0$

분자 : x^3+x^2-3x+6

$= (x^2+2x-1)(x-1)+5 = 5$

분모 : x^4+2x^3+2x+9

$= (x^2+2x-1)(x^2+1)+10 = 10$

$\therefore$ 준식 $= \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$

22. 유리수 a, b, c에 대하여 $\dfrac{1}{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{6}} = 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$일 때, $a+b+c$의 값을 구하면?

① $\dfrac{1}{4}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ $\dfrac{4}{5}$

해설

$$\frac{1}{a+b\sqrt{2}+c\sqrt{6}} = 1+\sqrt{2}+\sqrt{3} \text{ 에서}$$

$$a+b\sqrt{2}+c\sqrt{6} = \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}$$

$$= \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$\therefore\ a=\frac{1}{2},\ \ b=\frac{1}{4},\ \ c=-\frac{1}{4}$$

$$\therefore\ a+b+c=\frac{1}{2}$$