1. 두 직선 $(k-2)x+3y-1=0$, $y=kx+3$ 이 수직이 되도록 하는 모든 k 의 값을 구하면?

① $3, 1$　　② $3, -1$　　③ $4, 2$

④ $1, 5$　　⑤ $-2, -3$

해설

$y=kx+3 \Rightarrow kx-y+3=0$

$(k-2)k+3\cdot(-1)=0$

$k^2-2k-3=0$

$(k-3)(k+1)=0$

$\therefore\ k=3, -1$

해설

기울기의 곱이 -1 임을 이용하면

$-\dfrac{k-2}{3}\times k=-1$

$\therefore\ k(k-2)=3$

$\therefore k=3,\ -1$

2. 두 직선 $3x-2y+1=0$, $ax+4y-3=0$이 평행할 때의 a 값과 수직일 때 a 값의 곱은?

① -16 ② -12 ③ -8 ④ -4 ⑤ -1

해설

$3x-2y+1=0$에서 $y=\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\cdots\cdots$ ㉠

$ax+4y-3=0$에서 $y=-\frac{a}{4}x+\frac{3}{4}\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡이 평행일 때, $\frac{3}{2}=-\frac{a}{4}$ $\therefore a=-6$

㉠, ㉡이 수직일 때, $\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{a}{4}\right)=-1$ $\therefore a=\frac{8}{3}$

$\therefore (-6)\times\frac{8}{3}=-16$

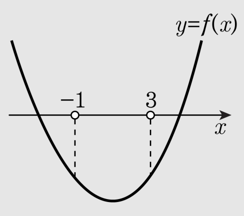
3. $-1 < x < 3$인 모든 실수 x에 대하여 이차부등식 $x^2+2(k-1)x+3k < 0$이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^2 + 2(k-1)x + 3k$ 라 하자.
$-1 < x < 3$ 인 모든 실수 x에 대하여 $f(x) < 0$ 이 항상 성립하려면 다음 그림과 같이 $f(-1) \le 0,\ f(3) \le 0$이어야 한다.



(i) $f(-1) \le 0$ 에서 $(-1)^2 + 2(k-1)\cdot(-1) + 3k \le 0$, $k + 3 \le 0$
$\therefore k \le -3$

(ii) $f(3) \le 0$ 에서 $3^2 + 2(k-1)\cdot 3 + 3k \le 0$, $9k + 3 \le 0$
$\therefore k \le -\frac{1}{3}$

(i), (ii)에서 $k \le -3$
따라서, 실수 k의 최댓값은 -3이다.

4. 세 점 A(1, 1), B(2, 4), C(a, 0)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$인 이등변삼각형이 되도록 하는 a의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

삼각형 ABC가 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$인 이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(1-a)^2+1^2}$

$\overline{\mathrm{BC}}=\sqrt{(2-a)^2+4^2}$

$2-2a+a^2=20-4a+a^2$

$2a=18$

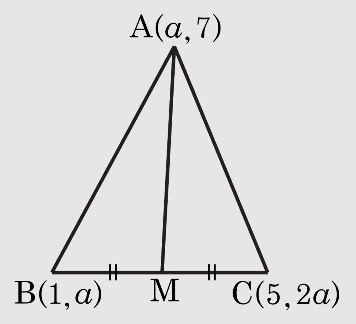
$\therefore\ a=9$

5. 세 점 $\mathrm{A}(a, 7), \mathrm{B}(1, a), \mathrm{C}(5, 2a)$ 와 선분 BC 의 중점 M에 대하여 $\overline{\mathrm{AM}}^2 + \overline{\mathrm{BM}}^2 = 22$ 일 때, 정수 a 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\triangle$ABC 를 그리면 다음과 같다.



이때, $\triangle$ABC 에서 중선정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 = 2\left(\overline{\mathrm{AM}}^2 + \overline{\mathrm{BM}}^2\right) = 2 \cdot 22 = 44$

따라서

$\{(1-a)^2 + (a-7)^2\} + \{(5-a)^2 + (2a-7)^2\} = 44$

$\left(2a^2 - 16a + 50\right) + \left(5a^2 - 38a + 74\right) = 44$

$7a^2 - 54a + 80 = 0$

$(a-2)(7a-40) = 0$

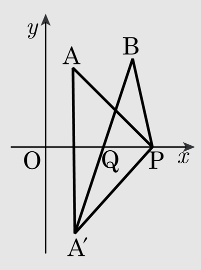
$\therefore a = 2$ 또는 $a = \dfrac{40}{7}$

이 때, a 는 정수이므로 $a = 2$

6. 두 점 A$(2,3)$, B$(3,4)$에 대하여 점 P가 x축 위를 움직일 때, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최소값은?

① $\sqrt{15}$ ② 7 ③ $5\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{13}$ ⑤ $\sqrt{53}$

해설



점 A$(2,3)$과 x축에 대하여 대칭인 점은 A$'(2,-3)$이다. 그림에서

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}\geq\overline{\mathrm{A'Q}}+\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{A'B}}$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 선분 A$'$B의 길이와 같다.

A$'(2,\ -3)$, B$(3,\ 4)$

$\overline{\mathrm{A'B}}=\sqrt{(3-2)^2+(4-(-3))^2}$

$=\sqrt{50}$

$=5\sqrt{2}$

7. 좌표평면 위의 세 점 $A(3,\ 3)$, $B(-3,\ 0)$, $C(3,\ 0)$ 에 대하여 $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$ 의 값이 최소가 되는 점을 $P(a,\ b)$ 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 + \overline{CP}^2$

$= (a-3)^2 + (b-3)^2 + (a+3)^2 + b^2 + (a-3)^2 + b^2$

$= 3(a^2 + b^2 - 2a - 2b + 12)$

$= 3(a-1)^2 + 3(b-1)^2 + 30$

따라서 $a = 1,\ b = 1$ 일 때, 최솟값 30 을 갖는다.

$\therefore\ a + b = 2$

8. 두 직선 $x-3y+5=0$, $x+9y-7=0$ 의 교점을 지나고, x 축의 양의 방향과 $30°$ 의 각을 이루는 직선의 방정식이 $x+by+c=0$ 일 때 $b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

두 식을 연립하여 풀면 두 직선의 교점의 좌표는

$(-2,\ 1)$ 이고, 기울기는 $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.

따라서 구하는 직선의 방정식은 $y-1=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+2)$

$\therefore x-\sqrt{3}y+\sqrt{3}+2=0$

$\therefore b=-\sqrt{3},\ c=2+\sqrt{3}$ $\quad \therefore\ b+c=2$

9. 두 점 $(4, -2), (2, -3)$ 을 지나는 직선의 x 절편을 A, y 절편을 B, 원점을 O 라 할 때, $\triangle$OAB 의 면적을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 16

해설

$(4, -2), (2, -3)$ 를 지나는 직선은

$y = \dfrac{-2-(-3)}{4-2}(x-2) - 3 = \dfrac{1}{2}x - 4$

$\Rightarrow$ x 절편은 8 이고, y 절편은 -4 이다.

$\therefore$ $\triangle$OAB 의 넓이는

$\dfrac{1}{2} \times 8 \times 4 = 16$ 이다.

10. 직선 $x + ay - 1 = 0$ 과 x 축, y 축의 양의 부분으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 $\frac{1}{4}$ 일 때, a 의 값을 구하여라. (단, $a > 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

해설

$y = -\frac{1}{a}x + \frac{1}{a}$ 의 x 절편은 $(1,\ 0)$ y 절편은 $(0, \frac{1}{a})$ 이다.

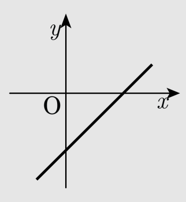
$\therefore$ 삼각형의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{a} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad a = 2$

11. 직선 $ax+by+c=0$에 대하여 $ab<0$, $bc>0$일 때, 이 직선이 지나지 않는 사분면을 구하여라.

▶ 답 : ______사분면

▷ 정답 : 제 2사분면

해설



$ax+by+c=0$에서

$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

주어진 조건에서

$ab<0$, $bc>0$ 이므로

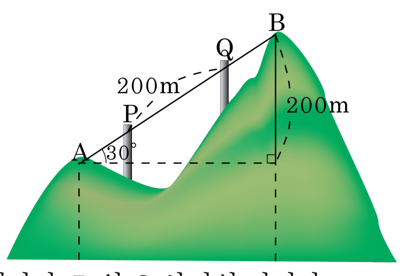
$-\frac{a}{b}>0$, $-\frac{c}{b}<0$

$\therefore$ (기울기)>0 , (y 절편)<0

따라서 주어진 직선은 다음 그림과 같으므로

지나지 않는 사분면은 제 2 사분면이다.

12. 다음 그림과 같이 두 산봉우리 A, B 지점을 직선으로 잇는 케이블을 설치하려고 한다. A, B 의 높이 차는 200 m 이고, A 에서 B 를 올려다 본 각은 $30°$ 이다. 선분 AB 를 $m : n$ 으로 내분하는 점 P 와 $n : m$ 으로 내분하는 점 Q 에 각각 지지대를 설치했더니, P 와 Q 사이의 거리가 200 m 가 되었다. 이때, $\frac{n}{m}$ 의 값은? (단, 케이블의 늘어짐은 무시한다.)



① $\frac{5}{3}$ ② 2 ③ $\frac{7}{3}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$\overline{AB} = \frac{200}{\sin 30°} = 400(\mathrm{m})$

$\overline{AP} : \overline{PB} = m : n$, $\overline{AQ} : \overline{QB} = n : m$ 이므로

$\overline{AP} = x$ 라 하면

$\overline{QB} = 200 - x$

$\overline{AP} : \overline{PB} = m : n$, $\overline{AQ} : \overline{QB} = n : m$ 이므로

$x : (400 - x) = (200 - x) : (200 + x)$

$\therefore\ x = 100$

$\overline{AP} : \overline{PB} = 100 : 300$

$\therefore\ \frac{n}{m} = 3$

13. 세 직선 $\begin{cases} x+2y=5 \\ 2x-3y=-4 \\ ax+y=0 \end{cases}$ 이 삼각형을 만들지 못할 때, 모든 상수 a 의 값을 구하면?

① $a=2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=-\frac{2}{3}$

② $a=2$ 또는 $a=-\frac{1}{2}$ 또는 $a=-\frac{2}{3}$

③ $a=2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=\frac{2}{3}$

④ $a=-2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=-\frac{2}{3}$

⑤ $a=-2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=\frac{2}{3}$

해설

$$\begin{cases} x+2y=5 & \cdots ㉠ \\ 2x-3y=-4 & \cdots ㉡ \\ ax+y=0 & \cdots ㉢ \end{cases}$$

에서 ㉠, ㉡의 교점은 $(1,\ 2)$ 이다.

(i) ㉢이 점$(1,\ 2)$ 를 지날 때, $a+2=0$ 에서 $a=-2$

(ii) ㉢이 ㉠과 평행할 때, $a=\frac{1}{2}$

(iii) ㉢이 ㉡과 평행할 때, $a=-\frac{2}{3}$

이상에서 구하는 모든 상수 a 의 값은

$a=-2$ 또는 $a=\frac{1}{2}$

또는 $a=-\frac{2}{3}$ 이다.

14. 두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$ 의 교점을 지나고, 원점에서부터의 거리가 1 인 직선의 방정식을 $ax+by+c=0$ 이라고 할 때, $a+b+c$ 의 값은?

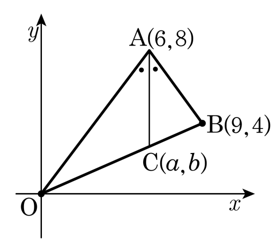
① -2　② -1 또는 2　③ 4

④ -2 또는 4　⑤ 0 또는 4

해설

두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$
의 교점을 지나는 직선의 방정식은
$x-2y+3+k(x-y+1)=0$ 으로
나타낼 수 있다. 이 식을 정리하면
$(1+k)x+(-2-k)y+(3+k)=0 \cdots$ ①
원점에서 이 직선까지의 거리가 1 이므로
$$\frac{3+k}{\sqrt{(1+k)^2+(-2-k)^2}}=1$$
양변에 제곱하여 정리하면
$(3+k)^2=(1+k)^2+(-2-k)^2$, $k^2=4$
$\therefore k=\pm 2$
이것을 ①에 대입하여 정리하면
$3x-4y+5=0$ 또는 $x-1=0$
따라서 $a+b+c$ 는 0 또는 4

15. 다음 그림과 같이 세 점 $O(0,\ 0)$, $A(6,\ 8)$, $B(9,\ 4)$를 꼭짓점으로 하는 $\triangle AOB$가 있다. $\angle A$ 의 이등분선이 변 OB 와 만나는 점을 $C(a,\ b)$ 라 할 때, ab 의 값은?



① 12　② 14　③ 15　④ 16　⑤ 18

해설

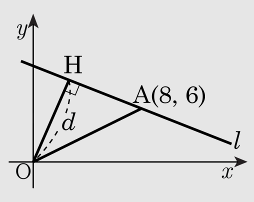
$\angle OAC = \angle BAC$ 이므로 $\overline{AO} : \overline{AB} = \overline{OC} : \overline{CB}$가 성립한다.
이때, $\overline{AO} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$
$\overline{AB} = \sqrt{(9-6)^2 + (4-8)^2} = 5$ 이므로
점 C 는 $\overline{OB}$ 를 $10 : 5$,
즉 $2 : 1$ 로 내분하는 점이다.
따라서 점 C 의 좌표는
$C\left(\dfrac{2\times 9 + 1\times 0}{2+1},\ \dfrac{2\times 4 + 1\times 0}{2+1}\right)$
$\therefore\ C\left(6,\ \dfrac{8}{3}\right)$　$\therefore\ ab = 6\cdot\dfrac{8}{3} = 16$

16. 좌표평면 위에서 점 $A(8,\ 6)$ 을 지나는 임의의 직선과 원점사이의 거리의 최댓값은?

① 6　　② 8　　③ 10　　④ 12　　⑤ 14

해설

점 $A(8,\ 6)$ 을 지나는 직선을 l , 원점 O 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 직각삼각형 OAH 에서 $\overline{OH} \le \overline{OA}$ 이므로, 원점 O 에서 직선 l 까지의 거리 d 는 $d \le \overline{OA} = \sqrt{8^2+6^2} = 10$
$\therefore\ d \le 10$



따라서 d 의 최댓값은 10 이다.

17. 세변의 길이가 각각 다음과 같을 때, 직각삼각형이 <u>아닌</u> 것은?

① $3, 5, 4$ ② $4, 2, 2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{3}, 2\sqrt{2}, \sqrt{5}$

④ $\sqrt{15}, 6, \sqrt{21}$ ⑤ $4, 5, 2\sqrt{2}$

해설

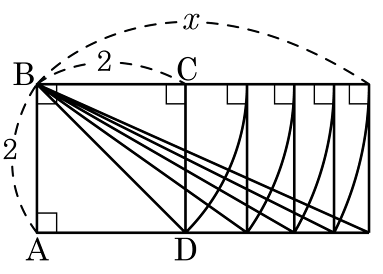
세 변의 길이가 a, b, c 인 삼각형에서 가장 긴 변의 길이를 c 라고 하고, $a^2 + b^2 = c^2$ 이 성립하면 직각삼각형이고, $a^2 + b^2 \neq c^2$ 이면 직각삼각형이 아니다.
⑤에서 가장 긴 변은 5 인데, $4^2 + (2\sqrt{2}) \neq 5^2$ 이므로 직각삼각형이 아니다.

18. 철수는 철사로 빗변의 길이가 20cm , 한 변의 길이가 10cm 인 직각삼각형을 만들었다. 나머지 한 변의 길이는?

① $9\sqrt{3}$cm ② $10\sqrt{2}$cm ③ $10\sqrt{3}$cm
④ $11\sqrt{3}$cm ⑤ $11\sqrt{2}$cm

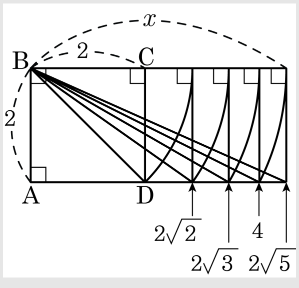
해설
나머지 한 변의 길이를 x 라고 하면
$x^2 = 20^2 - 10^2 = 300$
$x = \sqrt{300} = 10\sqrt{3}$(cm)

19. 그림을 보고 x 의 값으로 알맞은 것은 어느 것인가?

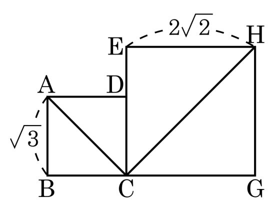


① $2\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

해설



20. 다음 그림과 같이 두 정사각형 ABCD 와 ECGH 가 서로 붙어 있다. $\overline{AB} = \sqrt{3}$, $\overline{EH} = 2\sqrt{2}$ 일 때, $\overline{AC} \times \overline{CH}$ 의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $4\sqrt{6}$

해설

삼각형 ABC 에서 피타고라스 정리에 따라
$(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 = \overline{AC}^2$
$\overline{AC} = \sqrt{6}$
삼각형 CGH 에서 피타고라스 정리에 따라
$(2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = \overline{CH}^2$
$\overline{CH} = 4$
따라서 $\overline{AC} \times \overline{CH} = \sqrt{6} \times 4 = 4\sqrt{6}$ 이다.