

1. 다음 중 옳은 것은?

① $n(\{\emptyset\}) = 0$

② $n(\{2\}) = 2$

③ $n(\{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 약수}\}) = 6$

④ $n(\{x \mid x \text{는 } 2 < x < 3 \text{인 자연수}\}) = 1$

⑤ $n(\{1, 3, 5\}) - n(\{3\}) = 2$

해설

$$n(\{1, 3, 5\}) - n(\{3\}) = 3 - 1 = 2$$

2. 집합 $A = \{2, 3, 5, 7\}$ 의 부분집합 중 원소 2를 반드시 포함하고 3을 포함하지 않는 부분집합의 개수는?

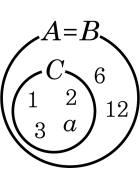
① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

집합 A 에서 원소 2를 반드시 포함하고, 3을 포함하지 않는 부분집합을 구하면 $\{2\}, \{2, 5\}, \{2, 7\}, \{2, 5, 7\}$ 이므로 4개이다.

3. 다음 벤 다이어그램을 보고, a, b 의 값을 구하여라.

$A = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$
 $B = \{1, 2, 3, 4, b, 12\}$
 $C = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{보다 작은 자연수}\}$



▶ 답 :

▶ 답 :

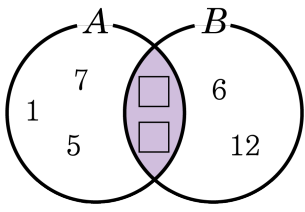
▷ 정답 : $a = 4$

▷ 정답 : $b = 6$

해설

집합 A, C 를 원소나열법으로 각각 나타내면 $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $C = \{1, 2, 3, 4\}$ 이다. 벤 다이어그램에서 $C \subset A$ 이므로 $a = 4$ 이다. 또, $A = B$ 이므로 $b = 6$ 이다.

4. 두 집합 $A = \{x|x \text{는 } 10 \text{ 이하의 홀수}\}, B = \{3, 6, 9, 12\}$ 를 벤 다이어그램으로 나타낼 때, $\square$ 안에 알맞은 수를 쓰시오.



▶ 답 :

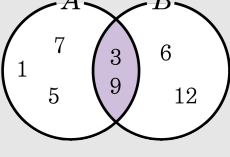
▶ 답 :

▶ 정답 : 3

▶ 정답 : 9

해설

$A = \{x|x \text{는 } 10 \text{ 이하의 홀수}\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}, B = \{3, 6, 9, 12\}$ 를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



5. 다음은 경화의 수학일기 중 일부이다. 다음 중 잘못된 것을 골라라.

오늘은 집합 A 가 집합 B 의 부분집합일 때, 두 집합 사이의 관계를 표현하는 다양한 방법들을 배웠다.

- $\textcircled{\tiny ㉠} \ A - B = \emptyset$
- $\textcircled{\tiny ㉡} \ A \cap B = A$
- $\textcircled{\tiny ㉢} \ A^c \cap B = \emptyset$
- $\textcircled{\tiny ㉣} \ B^c \subset A^c$
- $\textcircled{\tiny ㉤} \ A \cup B = B$

▶ 답 :

▶ 정답 : $\textcircled{\tiny ㉢}$

해설

$\textcircled{\tiny ㉢} \ A \subset B$ 일 때, $A^c \cap B \neq \emptyset$ 이다.

6. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 의 두 부분집합 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$ 에 대하여 $A^c \cap B^c$ 를 구하면?

- ① $\{1, 3\}$ ② $\{2, 4\}$ ③ $\{3, 5\}$ ④ $\{4, 8\}$ ⑤ $\{6, 8\}$

해설

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ 이고 $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = U - (A \cup B) = \{6, 8\}$

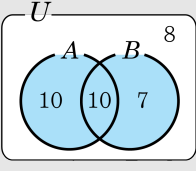
7. 학생 35 명 중에서 인라인 스케이트 인터넷 동호회에 가입한 학생은 20 명, 댄스 스포츠 인터넷 동호회에 가입한 학생은 17 명, 두 곳 모두 가입하지 않은 학생이 8명이다. 이때 인라인 스케이트나 댄스 스포츠 인터넷 동호회에 가입한 학생 수를 구하여라.

▶ 답 : 명

▷ 정답 : 27명

해설

주어진 문제를 벤 다이어그램을 활용하여 해결할 수 있다. 벤 다이어그램의 각 영역에 해당하는 학생의 수를 기입하면 다음과 같다.



8. 다음 명제 중에서 그 부정이 참인 것을 모두 고르면?

- ① $2 < \sqrt{6} \leq 3$
- ② 2는 소수가 아니다.
- ③ $2 > 3$ 또는 $3 \leq 5$
- ④ $2 \leq \sqrt{3} < 3$
- ⑤ 24는 4와 6의 공배수이다.

해설

거짓인 명제의 부정은 참이므로 거짓인 명제를 찾으면 된다. ①, ③, ⑤는 참인 명제이고, 2는 소수이고 $\sqrt{3} = 1.7\cdots$ 이므로 ②, ④는 거짓인 명제이다.

9. 양수 a, b 에 대하여 $\frac{4a+9b}{6\sqrt{ab}}$ 의 최솟값은?

- ① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned}\frac{4a+9b}{6\sqrt{ab}} &= \frac{1}{6} \left(\frac{4\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \frac{9\sqrt{b}}{\sqrt{a}} \right) \\ &\geq \frac{1}{6} \times 2 \times \sqrt{4 \times 9} = 2\end{aligned}$$

해설

10. 두 집합 $X = \{0, 1, 2\}$, $Y = \{-1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 가 $f(x) = 2x^2 - 3x$ 일 때, 함수 f 의 치역을 구하면?

① $\{-1, 1\}$

② $\{-1, 0, 1\}$

③ $\{0, 1, 2\}$

④ $\{-1, 0, 2\}$

⑤ $\{-1, 0, 1, 2\}$

해설

$f(x) = 2x^2 - 3x$ 이므로

$f(0) = 0, f(1) = -1, f(2) = 2$

따라서 치역은 $\{-1, 0, 2\}$

11. 10 보다 크고 20 보다 작은 자연수 중에서 4 의 배수의 집합을 A 라고 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $10 \in A$

② $14 \in A$

③ $16 \notin A$

④ $18 \notin A$

⑤ $20 \in A$

해설

집합 A 의 원소는 12, 16 이므로 $18 \notin A$ 이다.

12. 집합 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x \mid x^2 - 4x + 3 = 0\}$, $C = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 양의 약수}\}$ 일 때, 집합 A, B, C 사이의 포함 관계를 옳게 나타낸 것은?

- ① $A \subset B \subset C$ ② $B \subset A \subset C$ ③ $B \subset C \subset A$
④ $C \subset A \subset B$ ⑤ $C \subset B \subset A$

해설

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \text{ 에서 } (x - 1)(x - 3) = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = 3$$

따라서 $B = \{1, 3\}$ 이고, $C = \{1, 2, 3, 6\}$

따라서 집합 A, B, C 의 포함 관계는 $B \subset A \subset C$ 이다.

13. 두 집합 $A = \{3, 4, a + 1\}$, $B = \{a, 5, 6\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{4, 5\}$ 일 때, 집합 $A \cup B$ 의 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$A \cap B = \{4, 5\}$ 이므로 $A = \{3, 4, 5\}$

$\therefore a + 1 = 5$, $a = 4$

$B = \{4, 5, 6\}$

$\therefore A \cup B = \{3, 4, 5, 6\}$ 이다.

원소의 합은 $3 + 4 + 5 + 6 = 18$ 이다.

14. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A) = 52$, $n(A \cup B) = 87$, $A \cap B = \emptyset$ 일 때, $n(B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 35

해설

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$87 = 52 + n(B) - 0$$

$$\therefore n(B) = 35$$

15. 두 집합 $A = \{1, 2, 4, 8\}$, $B = \{2, 4, 5, 8\}$ 에 대하여 $(A \cup B) - (A \cap B)$ 는?

① $\{1\}$

② $\{5\}$

③ $\{8\}$

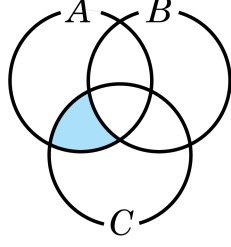
④ $\{1, 5\}$

⑤ $\{1, 8\}$

해설

$(A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 2, 4, 5, 8\} - \{2, 4, 8\} = \{1, 5\}$ 이다.

16. 다음 벤 다이어그램의 색칠한 부분을 나타내는 집합은?



- ① $A \cup B \cup C$
- ② $C - (A \cup B)$
- ③ $(A \cup C) - B$
- ④ $(B \cup C) - A$
- ⑤ $(A \cap C) - B$

해설

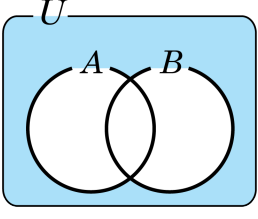
①

②

③

④

17. 다음 벤 다이어그램에서 $n(U) = 40$, $n(A) = 20$, $n(B) = 18$, $n(A \cap B) = 5$ 일 때, 색칠한 부분이 나타내는 집합의 원소의 개수를 구하여라.

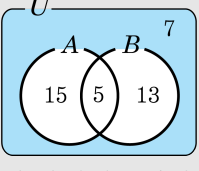


▶ 답 : 7 개

▷ 정답 : 7 개

해설

색칠된 부분이 나타내는 집합은 $(A \cup B)^c$
 $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 20 + 18 - 5 = 33$
 $\therefore n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B) = 40 - 33 = 7$
[별해]



벤 다이어그램의 각 부분에 속하는 원소의 개수를 적어 보면 색칠된 부분의 원소의 개수는 7 개이다.

18. 다음 중 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은?(a, x, y, z 는 모두 실수)

① $p : a < b, \quad q : |a| < |b|$

② $p : 2x + 3 = 5, \quad q : x^2 - 2x + 1 = 0$

③ $p : a > 3, \quad q : a^2 > 9$

④ $p : x > 0$ 이고 $y > 0, \quad q : x + y > 0$

⑤ $p : xy = yz, \quad q : x = z$

해설

주어진 명제도 참이고 역도 참인 것을 고른다.

① 주어진 명제, 역 모두 거짓이다.

② p, q 를 만족하는 값이 모두 $x = 1$ 이므로 필요충분조건이다.

③, ④ 주어진 명제만 참이고 역은 성립하지 않는다. $\therefore p$ 는 q 이기 위한 충분조건이다.

⑤ 주어진 명제는 거짓이고 역은 참이다.

$\therefore p$ 는 q 이기 위한 필요조건이다.

19. $x > y > 0$ 인 실수 x, y 에 대하여 $\frac{x}{1+x}, \frac{y}{1+y}$ 의 대소를 비교하면?

- ① $\frac{x}{1+x} < \frac{y}{1+y}$ ② $\frac{x}{1+x} \leq \frac{y}{1+y}$ ③ $\frac{x}{1+x} > \frac{y}{1+y}$
④ $\frac{x}{1+x} \geq \frac{y}{1+y}$ ⑤ $\frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y}$

해설

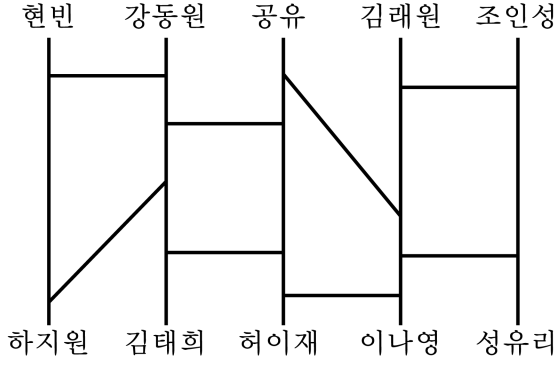
$A = \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y}$ 이라하면

$$A = \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} = \frac{x(1+y) - y(1+x)}{(1+x)(1+y)}$$

$$= \frac{x-y}{(1+x)(1+y)} > 0$$

따라서 $\therefore \frac{x}{1+x} > \frac{y}{1+y}$

20. 남녀 혼성 장기자랑에 참여한 H 남고 남학생 5명과 S 여고 여학생 5명이 파트너를 정하려고 한다. 남녀 한 명도 빠짐없이 팀을 이루기 위한 방법으로 사다리타기로 파트너를 정하기로 하였다. 현빈과 김태희가, 강동원과 이나영이, 공유와 성유리가, 김래원과 허이재가 짝을 이루었다면 남은 조인성의 파트너는 누구인가?



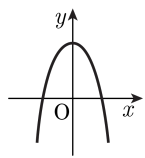
- ① 하지원
- ② 성유리
- ③ 이나영
- ④ 허이재
- ⑤ 김태희

해설

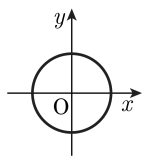
일대일 대응이므로 조인성-하지원이 파트너가 된다.

21. 다음 중 함수의 그래프인 것은?

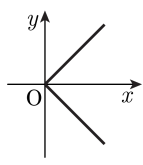
①



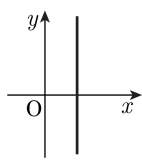
②



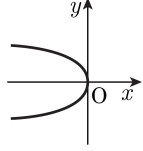
③



④



⑤



해설

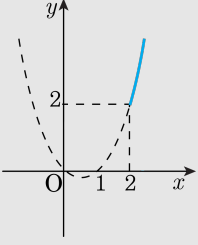
함수는 하나의 x 값에 여러 개의 y 값이 대응될 수 없다.

22. 이차함수 $f(x) = x^2 - x$ 가 있다. 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일대응이 되도록 하는 집합 X 는 $X = \{x|x \geq k\}$ 이다. 이 때, k 의 값은 얼마인가?

- ① 0
- ② 1
- ③ 2
- ④ 3
- ⑤ 4

해설

주어진 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일대응이려면,
(정의역)=(공역)이므로
(정의역)=(치역)이 되어야 한다.
즉, $f(k) = k$
 $\therefore k = 0$ 또는 $k = 2$
(i) $k = 0$ 이면 $f(0) = f(1)$ 이므로
 $f(x) = x^2 - x$ 가 일대일대응이 되지 않는다.
(ii) $k = 2$ 이면 일대일대응이 된다.
 $\therefore k = 2$



23. 두 집합 $X = \{-2, -1, 0, 1\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 상수함수의 개수를 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

두 집합 $X = \{-2, -1, 0, 1\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 상수함수는 $f(x) = 1, f(x) = 2, f(x) = 3$ 의 3개가 있다.

24. 두 함수 $f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 4x + a$ 에 대하여 $(g \circ f)(x) = 12x + 7$ 이 성립할 때, 상수 a 의 값은?

① -3

② -1

③ 1

④ 3

⑤ 5

해설

$f(x) = 3x + 1$, $g(x) = 4x + a$ 이므로

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 1)$

$= 4(3x + 1) + a$

$= 12x + 4 + a$

따라서 $12x + 4 + a = 12x + 7$ 에서 $4 + a = 7$

$\therefore a = 3$

25. 두 함수 $f(x) = -3x + k$, $g(x) = 2x + 4$ 에 대하여, $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ 가 성립하도록 하는 k 의 값은 얼마인가?

① -16 ② -14 ③ -6 ④ -4 ⑤ -2

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= -3x + k, \quad g(x) = 2x + 4 \text{에서} \\ (f \circ g)(x) &= f(2x + 4) = -3(2x + 4) + k \\ &= -6x - 12 + k \cdots \text{㉠} \\ (g \circ f)(x) &= g(-3x + k) = 2(-3x + k) + 4 \\ &= -6x + 2k + 4 \cdots \text{㉡} \\ \text{㉠과 ㉡이 같아야 하므로} \\ -6x - 12 + k &= -6x + 2k + 4 \\ \therefore k &= -16 \end{aligned}$$

26. 두 함수 $f(x) = x + 2$, $g(x) = 2x - 3$ 일 때, 합성함수 $g \circ f$ 의 역함수 $(g \circ f)^{-1}(x)$ 를 구하면 무엇인가?

- ① $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ ② $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ③ $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
④ $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ ⑤ $y = \frac{1}{2}x + 1$

해설

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x + 2) \\ &= 2(x + 2) - 3 = 2x + 1\end{aligned}$$

합성함수 $g \circ f$ 는 일대일대응이므로
역함수가 존재한다.

$y = 2x + 1$ 로 놓고 x 에 대하여 풀면

$$x = \frac{y}{2} - \frac{1}{2} \text{ 이 된다.}$$

따라서, $(g \circ f)^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 이다.

27. 일차함수 $f(x)$ 가 $f(1) = -1$, $f^{-1}(3) = 2$ 일 때, $2f^{-1}(1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) 로 놓으면,
 $f(1) = -1$, $f(2) = 3$ 이므로
 $f(1) = a + b = -1$, $f(2) = 2a + b = 3$
 $\therefore a = 4$, $b = -5$
 $\therefore f(x) = 4x - 5$
 $f^{-1}(1) = a$ 로 놓으면 $f(a) = 1$
 $4a - 5 = 1 \quad \therefore a = \frac{3}{2}$
따라서 $f^{-1}(1) = \frac{3}{2}$, $2f^{-1}(1) = 3$

28. 다음 두 조건 p, q 에 대하여 ‘ $\sim p$ 또는 q ’의 부정은?

$$p : -1 < x \leq 3, \quad q : 0 < x \leq 2$$

- ① $-1 < x \leq 0$ 또는 $2 < x \leq 3$
- ② $-1 < x < 0$ 또는 $2 \leq x \leq 3$
- ③ $-1 < x \leq 3$
- ④ $0 < x \leq 2$
- ⑤ x 는 모든 실수

해설

$\sim (\sim p \text{ 또는 } q) \leftrightarrow p$ 이고 $\sim q$ 그런데
 $\sim q : x \leq 0$ 또는 $x > 2$ 이므로 p 이고 $\sim q$
 $\leftrightarrow (-1 < x \leq 3)$ 이고 $(x \leq 0$ 또는 $x > 2)$
 $\leftrightarrow (-1 < x \leq 3$ 이고 $x \leq 0)$ 또는 $(-1 < x \leq 3$ 이고 $x > 2)$
 $\leftrightarrow -1 < x \leq 0$ 또는 $2 < x \leq 3$

29. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하고, $P \cap Q = P$ 일 때, 다음 중 참인 명제는?

- ① $p \rightarrow \sim q$
- ② $q \rightarrow p$
- ③ $\sim p \rightarrow q$
- ④ $q \rightarrow \sim p$
- ⑤ $\sim q \rightarrow \sim p$

해설

$P \cap Q = P$ 이므로 $P \subset Q$ 이다. 따라서, $p \rightarrow q$ 가 참이므로 대우 명제인 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

30. 다음 보기의 명제 중 ‘역’과 ‘대우’가 모두 참인 명제를 모두 고르면?

- ㉠

자연수 n 에 대하여 n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이다.
- ㉡

실수 x, y 에 대하여 $x + y > 2$ 이면 $x > 1$ 또는 $y > 1$ 이다.
- ㉢

$\triangle ABC$ 에서 $\angle A = \angle B$ 이면 $\triangle ABC$ 는 이등변삼각형이다.

- ①

㉠
- ②

㉡
- ③

㉠, ㉡
- ④

㉡, ㉢
- ⑤

㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ n^2 이 홀수이면 n 도 홀수이고, n 이 홀수이면 n^2 도 홀수이므로 명제와 그 역이 모두 참이다. 따라서 역과 대우 모두 참이다.
㉡ 역 ‘ $x > 1$ 또는 $y > 1$ 이면 $x + y > 2$ ’에서 $x = 2, y = -3$ 일 때 $2 - 3 < 2$ 이므로 거짓이다. 대우 ‘ $x \leq 1$ 이고 $y \leq 1$ 이면 $x + y \leq 2$ ’는 참이다.
㉢ 역 ‘ $\triangle ABC$ 가 이등변삼각형이면 $\angle A = \angle B$ ’는 $\angle A = \angle C$ 또는 $\angle B = \angle C$ 일 때도 $\triangle ABC$ 는 이등변삼각형이므로 거짓이다. 주어진 명제가 참이므로 그 대우도 참이다.
따라서 역과 대우가 모두 참인 것은 ㉠뿐이다.

31. 「 a, b 가 정수일 때, ab 가 짝수이면 a 또는 b 는 짝수이다.」라는 명제를 다음과 같이 증명하려고 한다.

주어진 명제의 대우를 쓰면「 a, b 가 정수일 때, a, b 가 모두 홀수이면 ab 도 홀수이다.」와 같다. 여기서 a, b 를 $a = 2k + 1, b = 2l + 1$ (단, k, l 은 정수)로 놓으면 $ab = (2k + 1)(2l + 1) = 4kl + 2k + 2l + 1 = 2(2kl + k + l) + 1$ k, l 은 정수이므로 $2kl + k + l$ 도 (㉠)이다. 그러므로 ab 는 (㉡)이다.
따라서, 주어진 명제의 대우가 (㉢)이므로 주어진 명제도 (㉢)이다.

이 때, ()안에 알맞은 것을 ㉠, ㉡, ㉢ 순서대로 바르게 나타낸 것은?

- ① 짝수, 정수, 참

② 홀수, 홀수, 거짓

③ 정수, 홀수, 참

④ 홀수, 짝수, 거짓

⑤ 정수, 짝수, 참

해설

k, l 이 정수일 때, $2kl + k + l$ 도 정수이다.
따라서, $ab = 2(2kl + k + l) + 1$ 은 홀수가 된다.
대우가 참이면 주어진 명제는 항상 참이다.

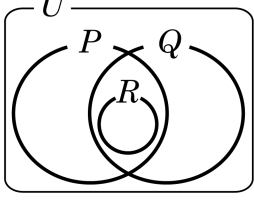
32. 다음 중 두 조건 p, q 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요조건만 되는 것은? (단, x, y 는 실수, A, B 는 집합이다.)
- ① $p : x^2 - 4x + 4 = 0, q : x^2 - 3x + 2 = 0$
 - ② $p : x$ 는 8의 양의 약수, $q : x$ 는 6의 양의 약수
 - ③ $p : |x| < 1, q : x^2 - 1 < 0$
 - ④ $p : |x + y| = |x| + |y|, q : x = y$
 - ⑤ $p : A - B = A, q : A \cap B = \emptyset$

해설

주어진 명제는 거짓이고 역은 참인 것을 고른다.

- ① 충분조건
- ② 아무런 조건 아님
- ③ 필요충분조건
- ⑤ 필요충분조건

33. 전체집합 U 에 대하여 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 하자. 이 집합의 포함 관계가 다음 그림과 같을 때, 다음 중 옳은 것은?



- ① r 는 p 또는 q 이기 위한 필요조건이다.
- ② $\sim r$ 는 $\sim p$ 또는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이다.
- ③ r 는 p 이고 q 이기 위한 충분조건이다.
- ④ r 는 p 이고 q 이기 위한 필요충분조건이다.
- ⑤ $\sim r$ 는 p 이고 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이다.

해설

$R \subset (P \cup Q), R \subset (P \cap Q)$ 이므로
① r 는 p 또는 q 이기 위한 충분조건이다.
③ r 는 p 이고 q 이기 위한 충분조건이다.

35. 실수 x, y 가 $x^2 + y^2 = 5$ 를 만족할 때, $x + 2y$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. 이 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$$(1^2 + 2^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 2y)^2$$

$x^2 + y^2 = 5$ 이므로

$$25 \geq (x + 2y)^2$$

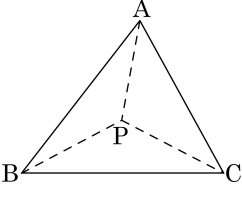
$$\therefore -5 \leq x + 2y \leq 5$$

$$\therefore M = 5, m = -5$$

$$\therefore M - m = 5 - (-5) = 10$$

36. 넓이가 a 인 삼각형 ABC의 내부에 한 점 P에 대하여 $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, $\triangle PCA$ 의 넓이를 각각 S_1 , S_2 , S_3 이라 할 때 $S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ 의 최솟값은?

- ① $\frac{a^2}{3}$ ② a^2 ③ $\sqrt{3}a^2$
 ④ $3a^2$ ⑤ $3\sqrt{3}a^2$



해설

$$\begin{aligned}
 S_1 + S_2 + S_3 &= a \\
 (1^2 + 1^2 + 1^2)(S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) &\geq (S_1 + S_2 + S_3)^2 = a^2 \\
 \therefore S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 &\geq \frac{a^2}{3}
 \end{aligned}$$

37. 두 함수 $f(x) = x - 1, g(x) = x^2 + 4$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f))(x) = 18$ 을 만족하는 실수 x 의 값들의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

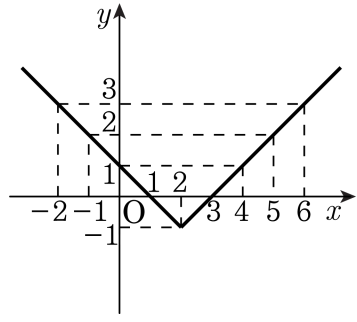
$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ f))(x) &= f(g(f(x))) = f(g(x-1)) \\ &= f((x-1)^2 + 4) \\ &= f(x^2 - 2x + 5) \\ &= (x^2 - 2x + 5) - 1 \\ &= x^2 - 2x + 4\end{aligned}$$

$$(f \circ (g \circ f))(x) = 18$$

$$\text{이므로 } x^2 - 2x + 4 = 18, \quad x^2 - 2x - 14 = 0$$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 구하는 x 의 값의 합은 2 이다.

38. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(f(x)) = 0$ 의 모든 근의 합을 구하여라.



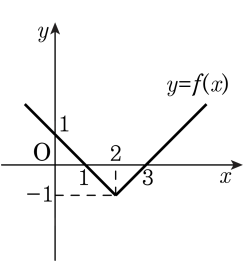
▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$f(f(x)) = 0$ 에서 $f(x) = X$ 라 하면
 $f(X) = 0$ 이므로 $X = 1$ 또는 $X = 3$
 $X = 1$ 즉, $f(x) = 1$ 일 때, $x = 0, 4$
 $X = 3$ 즉, $f(x) = 3$ 일 때, $x = -2, 6$
따라서, 모든 근의 합은 $0 + 4 + (-2) + 6 = 8$ 이다.

39. 함수 $f(x) = |x - 2| - 1$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은 무엇인가?



보기

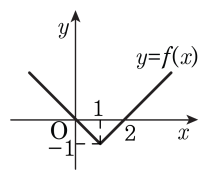
- ㉠ $f(0) = 0$
- ㉡ $f(x) = 0$ 이면 $x = 1$ 또는 $x = 3$
- ㉢ $f(x) < 0$ 이면 $1 < x < 3$
- ㉣ $a < b < 2$ 이면 $f(a) > f(b)$

- ① ㉠, ㉡
- ② ㉠, ㉡, ㉣
- ③ ㉠, ㉡, ㉣
- ④ ㉡, ㉢, ㉣
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

- ㉠ $f(0) = 1$
 - ㉡ $f(1) = 0, f(3) = 0$ 이므로
 $f(x) = 0$ 이면 $x = 1$ 또는 $x = 3$
 - ㉢ $f(x) < 0$ 이면 그래프가
 x 축의 아래에 있는 구간이므로 $1 < x < 3$
 - ㉣ $x < 2$ 는 그래프가 감소하는 구간이므로,
 $a < b < 2$ 이면 $f(a) > f(b)$
- 따라서 옳은 것은 ㉡, ㉢, ㉣이다.

40. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음의 그림과 같을 때, $f(x)$ 는?



- ① $f(x) = |x + 1| + 1$ ② $f(x) = |x + 1| - 1$
 ③ $f(x) = |x - 1| + 1$ ④ $f(x) = |x - 1| - 1$
 ⑤ $f(x) = -|x - 1| + 1$

해설

주어진 그래프는 함수 $y = |x|$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이므로 $y = |x|$ 에 x 대신 $x - 1$, y 대신 $y + 1$ 을 대입하면

$$y + 1 = |x - 1|$$

$$y = |x - 1| - 1$$

$$\therefore f(x) = |x - 1| - 1$$

41. 집합 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ 를 조건제시법으로 나타낸 것 중 옳지 않은 것은?

- ① $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 3 \text{인 정수}\}$
- ② $A = \{x \mid -1 < x \leq 3 \text{인 정수}\}$
- ③ $A = \{x \mid x \text{는 자연수를 4로 나눈 나머지}\}$
- ④ $A = \{x \mid 0 \leq x < 4 \text{인 수}\}$
- ⑤ $A = \{x \mid -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{7}{2} \text{인 정수}\}$

해설

④ $\{x \mid 0 \leq x < 4 \text{인 수}\}$ 에는 0, 1, 2, 3 이외에도 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, 2, 5, \dots$ 등 무수히 많은 원소가 있다.

42. 다음 집합 중에서 무한집합인 것을 모두 고르면?

- ① $\{x \mid x \text{는 } 5 \text{의 배수}\}$
- ② $\{x \mid x \text{는 } 100 \text{이하의 홀수}\}$
- ③ $\{x \mid x \text{는 } x \geq 5 \text{인 수}\}$
- ④ $\{x \mid x \text{는 } 0 < x < 1 \text{인 분수}\}$
- ⑤ $\{x \mid x \text{는 } 6 < x < 7 \text{인 자연수}\}$

해설

- ① $\{5, 10, 15, 20, \dots\}$ 무한집합
- ② $\{1, 3, 5, 7, \dots, 97, 99\}$ 유한집합
- ③ $\{5, 6, 7, 8, \dots\}$ 무한집합
- ④ $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$ 무한집합
- ⑤ 공집합

43. 세 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$, $X = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ 에 대하여 $A \subset X \subset B$ 일 때, n 의 최댓값과 최솟값의 차를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$A \subset X \subset B$ 이므로, $A = X$ 일 때, n 이 최솟값을 갖고, $X = B$ 일 때, n 이 최댓값을 갖는다.

따라서 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\} = X$, $n = 5$ (최솟값)

$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} = X$,

$n = 10$ (최댓값)

$\therefore 10 - 5 = 5$

44. 진수네 반에서 동생이 있는 학생은 모두 25 명이다. 이 중에서 남동생이 있는 학생이 18 명, 여동생이 있는 학생이 15 명이었다. 남동생과 여동생이 모두 있는 학생은 몇 명인지 구하여라.

▶ 답: 명

▶ 정답 : 8 명

해설

남동생과 여동생이 있는 집합을 각각 A , B 라 하면

$$n(A) = 18, n(B) = 15, n(A \cup B) = 25$$

$$n(A \cap B) = 18 + 15 - 25 = 8$$

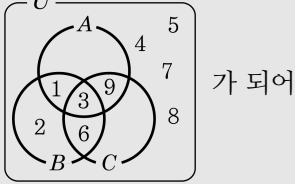
45. $U = \{x \mid x \text{는 } 9 \text{ 이하의 자연수}\}$ 에 대하여
 $A = \{x \mid x \text{는 } 9 \text{의 약수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 약수}\}$, $C = \{x \mid x \text{는 } 3 \text{의 배수}\}$ 일 때, $(A - B)^c$ 의 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 36

해설

$A = \{1, 3, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 6\}$, $C = \{3, 6, 9\}$ 이므로
벤 다이어그램으로 나타내면



$(A - B)^c = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 이다. 따라서 원소의 합은 36 이다.

46. 임의의 두 집합 A, B 에 대하여 연산 $\star$ 를 $A \star B = (A \cup B) - (A \cap B)$ 라고 정의할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $A \star U = A$
- ② $A \star A = \emptyset$
- ③ $\{a, b\} \star \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$
- ④ $(A \cap B) \star (A \cap C) = A \cap (B \star C)$
- ⑤ $\emptyset \star A = A$

해설

- ① $A \star U = (A \cup U) - (A \cap U) = U - A = A^c$
- ② $A \star A = (A \cup A) - (A \cap A) = A - A = \emptyset$
- ③ $\{a, b\} \star \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$
- ④ $(A \cap B) \star (A \cap C) = A \cap (B \star C)$
- ⑤ $\emptyset \star A = (\emptyset \cup A) - (\emptyset \cap A) = A - \emptyset = A$

47. 다음은 “실수를 계수로 갖는 세 개의 이차방정식 $ax^2 + 2bx + c = 0$, $bx^2 + 2cx + a = 0$, $cx^2 + 2ax + b = 0$ 중 적어도 하나는 실근을 갖는다”는 것을 증명한 것이다. 위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞는 부등호를 차례대로 쓰면?

증명

주어진 방정식이 모두 허근을 갖는다고 가정하면
 $b^2 - ac \not\geq 0$, $c^2 - ab \not\geq 0$, $a^2 - bc \not\geq 0$
세 식을 같은 변끼리 더하면
 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac \not\geq 0$
좌변을 변형하면
 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac$
 $= \frac{1}{2}((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2) \not\geq 0 \cdots \textcircled{가}$
그런데 a, b, c 는 실수이므로
 $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \cdots \textcircled{나}$
따라서, $\textcircled{나}$ 은 $\textcircled{가}$ 에 모순이므로 세 방정식 중 적어도 하나는 실근을 갖는다.

- ① <, <, ≥

② <, <, >

③ <, >, <
- ④ ≥, ≥, ≤

⑤ ≥, ≤, ≥

해설

주어진 방정식이 모두 허근을 갖는다면
 $b^2 - ac < 0$, $c^2 - ab < 0$, $a^2 - bc < 0$ (가정)
세 식을 같은 변끼리 더하면
 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac < 0$
좌변을 변형하면
 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac$
 $= \frac{1}{2} \{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \} < 0 \cdots \textcircled{가}$
그런데 a, b, c 는 실수이므로
 $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \cdots \textcircled{나}$
따라서, $\textcircled{나}$ 은 $\textcircled{가}$ 에 모순이므로 세 방정식 중 적어도 하나는 실근을 갖는다.

48. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 임의의 양수 a, b 에 대하여 $f(ab) = f(a) + f(b)$ 인 관계를 만족시킬 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

- ① $f(1) = 1$
② $f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0$
③ $f(a^2) = 2f(a)$
④ $f(a^n) = nf(a)$
⑤ $x > 1$ 일 때, $f(x) < 0$ 이면 $f(x)$ 는 감소함수이다.

해설

① $b = 1$ 이라고 하면

$$f(a) = f(a \cdot 1) = f(a) + f(1)$$

$$\therefore f(1) = 0$$

② $b = \frac{1}{a}$ 이면 $0 = f(1) = f\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$

③ $b = a$ 이면 $f(a^2) = f(a \cdot a) = f(a) + f(a) = 2f(a)$

④ ③에 의하여 $f(a^n) = f(a \cdot a \cdots a) = f(a) + f(a) + \cdots + f(a) = nf(a)$

⑤ $ab = x, a = y$ 이면 $b = \frac{x}{y}$ 이므로

$$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$$

이 때, $x > y$ 이면 $\frac{x}{y} > 1$ 이므로 $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

따라서 $f(x) < f(y)$ 이므로 $f(x)$ 는 감소함수

49. 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 가 $(f \circ g)(x) = 2x - 3, h(x) = 2x + 1$ 을 만족할 때, $(h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1})(3)$ 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$(f \circ g)^{-1}(3) = a \text{ 로 놓으면 } (f \circ g)(a) = 3$$

$$2a - 3 = 3 \text{ 에서 } a = 3$$

$$\therefore (f \circ g)^{-1}(3) = 3$$

$$\therefore (h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1})(3) = (h^{-1} \circ (f \circ g)^{-1})(3) = h^{-1}((f \circ g)^{-1}(3)) = h^{-1}(3)$$

$$h^{-1}(3) = b \text{ 놓으면 } h(b) = 3$$

$$2b + 1 = 3$$

$$\therefore b = 1$$

$$\therefore (h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1})(3) = h^{-1}(3) = 1$$

50. 함수 $f(x)$ 는 모든 함수 $h(x)$ 에 대하여 $(h \circ f \circ g)(x) = h(x)$ 를 만족시키고, $g(x) = 3x + 1$ 일 때, $f(7)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$(h \circ f \circ g)(x) = h(x)$ 에서

$h((f \circ g)(x)) = h(x)$ 이므로

$(f \circ g)(x) = x \Rightarrow f(g(x)) = x$

$f(3x + 1) = x$

$3x + 1 = t$ 로 두면 $x = \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}$ 이고

$f(t) = \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}$

$\therefore f(7) = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = 2$