1. 다음 중 $A \neq B$ 인 것은?

① $A = \{2, 4, 8\}$, $B = \{8, 2, 4\}$

② $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{x \mid x\text{는 10 이하의 홀수}\}$

③ $A = \{a,\ b,\ c,\ 3\}$, $B = \{3,\ c,\ b,\ a\}$

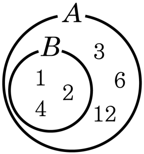
④ $A = \{x \mid x\text{는 7 이하의 홀수}\}$, $B = \{x \mid x\text{는 8 이하의 홀수}\}$

⑤ $A = \{5, 10, 15, \cdots\}$, $B = \{x \mid x\text{는 100 이하의 5의 배수}\}$

해설

$$B = \{x \mid x\text{는 100 이하의 5의 배수}\}$$
$$= \{5, 10, 15, \cdots, 100\} \neq A$$

2. 다음 벤다이어그램을 보고, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?
(답2 개)



① $A=\{3,\ 6,\ 12\}$ ② $B=\{1,\ 2,\ 4\}$ ③ $A\subset B$

④ $A\cap B=A$ ⑤ $A\cup B=A$

해설

① 집합 A는 집합 B부분을 포함하므로 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 12\}$ 이다.
③ 집합 A는 집합 B부분을 포함하므로 $B\subset A$ 이다.
④ $A\cap B=B$ 이다.

3. 두 집합 $A = \{1,\ 3,\ a+1\}$,$B = \{\ 3,\ a,\ b\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{3,\ 5\}$ 일 때 a , b 의 값은?

① $a=2,\ b=1$ ② $a=3,\ b=2$ ③ $a=4,\ b=5$

④ $a=5,\ b=4$ ⑤ $a=6,\ b=5$

해설

$5 \in A$ 이므로 $a+1=5,\ \ a=4$

$5 \in B$ 이므로 $b=5$

4. $A = \{2, 4, 6, 9, 10\}$, $B = \{2, 7, 9, 10\}$ 에 대하여 $X - A = \varnothing$, $(A - B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 가 될 수 있는 것은?

① $\{2, 4\}$ ② $\{2, 6\}$ ③ $\{4, 6\}$

④ $\{4, 6, 7\}$ ⑤ $\{4, 6, 9, 11\}$

해설

$(A - B) \subset X \subset A$ 이므로 $\{4, 6\} \subset X \subset \{2, 4, 6, 9, 10\}$ 이다. 따라서 X 가 될 수 있는 집합은 $\{4, 6\}$ 이다.

5. a, b, x y가 실수이고, $a^2 + b^2 = 8, x^2 + y^2 = 2$일 때 $ax + by$의 최댓값과 최솟값의 곱은?

① -16 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 16

해설

a, b, x, y가 실수이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$
$8 \times 2 \geq (ax + by)^2$
$\therefore -4 \leq ax + by \leq 4$
(최댓값) $\times$(최솟값)$= -16$

6. 실수 전체의 집합을 R이라 할 때, 다음 중 R에서 R로의 함수가 될 수 없는 것은 무엇인가?

① $y = 0$ ② $y = -x + 4$ ③ $y = (x-1)^2$

④ $x = y^2 + 4$ ⑤ $y = x^3$

해설

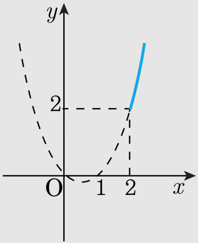
4일 때, $5 = y^2 + 4$, $y^2 = 1$에서 $y = \pm 1$
즉, $x = 5$에 대응하는 y의 값이
-1, 1의 두 개이므로 함수가 될 수 없다.

7. 이차함수 $f(x) = x^2 - x$ 가 있다. 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일대응이 되도록 하는 집합 X 는 $X = \{x | x \geq k\}$ 이다. 이 때, k 의 값은 얼마인가?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

주어진 함수 $f : X \rightarrow X$ 가 일대일대응이려면,
(정의역)=(공역)이므로
(정의역)=(치역)이 되어야 한다.
즉, $f(k) = k$
$\therefore\ k = 0$ 또는 $k = 2$
(i) $k = 0$ 이면 $f(0) = f(1)$ 이므로
$f(x) = x^2 - x$ 가 일대일대응이 되지 않는다.
(ii) $k = 2$ 이면 일대일대응이 된다.
$\therefore\ k = 2$



8. $x : y = 4 : 3$ 일 때, $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ 의 값은?

① $\dfrac{7}{25}$ ② $\dfrac{9}{25}$ ③ $\dfrac{11}{25}$ ④ $\dfrac{13}{25}$ ⑤ $\dfrac{16}{25}$

해설

$x : y = 4 : 3$ 에서 $x = 4k,\ y = 3k(k \neq 0)$ 라고 하면

$\therefore$ (준식) $= \dfrac{16k^2 - 9k^2}{16k^2 + 9k^2} = \dfrac{7}{25}$

9. 유리수 a, b가 등식 $(a+\sqrt{2})^2 = 6 + b\sqrt{2}$를 만족시킬 때, ab의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 8

해설

$a^2 + 2\sqrt{2}a + (\sqrt{2})^2 = 6 + b\sqrt{2}$
무리수의 상등에 의하여
유리수 부분 : $(a^2+2) = 6,\ a^2 = 4$
무리수 부분 : $2a\sqrt{2} = b\sqrt{2},\ 2a = b$

$$\begin{cases} a = 2, b = 4,\ ab = 8 \\ a = -2, b = -4,\ ab = (-2)(-4) = 8 \end{cases}$$

$\therefore ab = 8$

10. 분수함수 $y=\dfrac{3x-2}{2-x}$ 의 점근선의 방정식이 $x=a,\ y=b$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=-1$

해설

$y=\dfrac{cx+d}{ax+b}$ 의 점근선은 $x=-\dfrac{b}{a}$, $y=\dfrac{c}{a}$ 이므로

주어진 분수함수의 점근선은 $x=2,\ y=-3$ 이다.

$\therefore 2+(-3)=-1$

11. 중앙 고등학교 3 학년 어떤 반에서 영어를 좋아하는 학생이 24 명, 수학을 좋아하는 학생 16 명, 영어 또는 수학을 좋아하는 학생이 30 명이다. 영어와 수학을 모두 좋아하는 학생은 몇 명인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 명

▷ 정답 : 10 명

해설

영어를 좋아하는 학생을 집합 A 라 하고, 수학을 좋아하는 학생을 B 라고 하자.
그렇다면 영어 또는 수학을 좋아하는 학생은 $A \cup B$ 가 된다.
영어와 수학을 모두 좋아하는 학생, 즉 $A \cap B$ 를 구하는 것이다.
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$30 = 24 + 16 - x$
그러므로 x는 10 이다.

12. p_n 이 다음과 같을 때, $f(p_n) = 1$ (p_n이 명제이면) $f(p_n) = -1$ (p_n이 명제가 아니면) 로 정의한다. 이 때, $f(p_1)+f(p_2)+f(p_3)$ 의 값을 구하면? (단, $n = 1, 2, 3$)

p_1 : $x^2 - x - 2 = 0$ p_2 : 16의 양의 약수는 모두 짝수이다. p_3 : $\sqrt{3}$ 은 유리수이다.

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$f(p_n) = \begin{cases} 1 \ (p_n\text{이 명제이다.}) \\ -1 \ (p_n\text{이 명제가 아니다.}) \end{cases}$$

p_1 : $x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow$ 명제가 아니다.($\because$ x 값에 따라 참 일수도 거짓일수도 있다.)

p_2 : 거짓, p_3 : 거짓 $\rightarrow$ 모두 거짓인 명제이다.

$\therefore$ $f(p_1)+f(p_2)+f(p_3) = (-1)+1+1 = 1$

13. 다음 조건p 는 조건q 이기 위한 어떤 조건인지 구하여라.(단,a, b 는 실수)

(i) p : a, b 는 유리수, q : $a+b, ab$ 는 유리수 (ii) p : x 는 3의 배수 , q : x 는 6의 배수

▶ **답 :** 조건

▷ **정답 :** 필요조건

해설

14. 다음 두 조건 $p: 2 \leq x \leq 5$, $q: x \geq a$ 에 대하여 p 는 q이기 위한 충분조건이 되도록 상수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

p 가 q 이기 위한 충분조건이므로 각각의 진리집합을 P, Q 라 할 때, $P \subset Q$ 이 성립해야 한다. 따라서 $2 \leq x \leq 5$ 를 만족하는 영역은 $x \geq a$를 만족하는 영역에 포함되어야 함으로 $a \leq 2$
따라서 a의 최댓값은 2

15. 함수 f가 모든 실수 $x,\ y$에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)$를 만족할 때, $f(0)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x+y)=f(x)+f(y)$ 에서
$x=0,\ y=0$ 을 대입하면
$f(0+0)=f(0)+f(0),\ f(0)=2f(0)$
$\therefore\ f(0)=0$

16. 두 함수 $f(x) = x^2 - 5,\ g(x) = \begin{cases} 2x & (x \geq 0) \\ x^2 & (x < 0) \end{cases}$ 에 대하여 $(g \circ f)(2) + (g \circ f)(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 9

해설

$$\begin{aligned}(g \circ f)(2) + (g \circ f)(3) &= g(f(2)) + g(f(3)) \\ &= g(-1) + g(4) \\ &= (-1)^2 + 2 \times 4 \\ &= 9\end{aligned}$$

17. $x \neq -1$ 인 실수에서 정의된 분수함수 $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ 에 대하여 $f^2 = f \circ f, \quad \cdots \quad f^{n+1} = f^n \circ f$ 이 성립할 때, $f^{2005}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

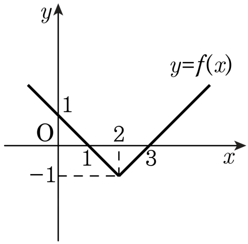
해설

$$f^2(x) = f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = \frac{1 - \dfrac{1-x}{1+x}}{1 + \dfrac{1-x}{1+x}} = x \text{ 이므로}$$

따라서, $f^{2n}(x) = x$ 이다. (단, n 은 자연수)

$$\therefore \ f^{2005}\left(-\frac{1}{2}\right) = f^{2004}\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3$$

18. 함수 $f(x) = |x-2|-1$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 다음 <보기> 중 옳은 것을 <u>모두</u> 고른 것은 무엇인가?



보기

㉠ $f(0)=0$
㉡ $f(x)=0$ 이면 $x=1$ 또는 $x=3$
㉢ $f(x)<0$ 이면 $1<x<3$
㉣ $a<b<2$ 이면 $f(a)>f(b)$

① ㉠ , ㉡ ② ㉠, ㉡, ㉢ ③ ㉠, ㉡, ㉣
④ ㉡, ㉢, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ $f(0)=1$
㉡ $f(1)=0,\ f(3)=0$ 이므로
$f(x)=0$ 이면 $x=1$ 또는 $x=3$
㉢ $f(x)<0$ 이면 그래프가
x 축의 아래에 있는 구간이므로 $1<x<3$
㉣ $x<2$ 는 그래프가 감소하는 구간이므로,
$a<b<2$ 이면 $f(a)>f(b)$
따라서 옳은 것은 ㉡, ㉢, ㉣이다.

19. 분수식 $2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cdots}}}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

해설

(준식)$=a$라 하면

$$2-\frac{1}{a}=a \;\rightarrow\; a^2-2a+1=0 \;\rightarrow\; (a-1)^2=0$$

$\therefore\; a=1$

20. $y=\dfrac{ax+b}{x+c}$의 그래프는 점 $(2,\ 0)$을 지나고, $x=1,\ y=2$를 점근선으로 할 때, $a+b+c$의 값을 구하면?

① -1 ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ -2 ④ $-\dfrac{3}{2}$ ⑤ -3

해설

$x=1,\ y=2$가 점근선이므로

$y=\dfrac{k}{x-1}+2$이다.

점$(2,\ 0)$을 지나므로 $k=-2$

$\therefore\ y=\dfrac{-2}{x-1}+2=\dfrac{-2+2(x-1)}{x-1}=\dfrac{2x-4}{x-1}$

$\therefore\ a=2,\ b=-4,\ c=-1$

$\therefore\ a+b+c=-3$

21. 정의역이 $\{x \mid x \leq 3\}$, 치역이 $\{y \mid y \geq 4\}$ 인 무리함수 $f(x) = \sqrt{a(x-p)} + q$ 에 대하여 $f(1) = 6$ 일 때, $a + p + q$ 의 값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

정의역은 $\{x \mid a(x-p) \geq 0\} = \{x \mid x \leq 3\}$ 이므로 $a < 0,\ p = 3$

치역은 $\{y \mid y \geq 4\}$ 이므로 $q = 4$

$\therefore\ f(x) = \sqrt{a(x-3)} + 4$

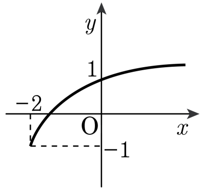
이때, $f(1) = 6$ 이므로

$\sqrt{-2a} + 4 = 6,\ \sqrt{-2a} = 2$, $-2a = 4$

$\therefore\ a = -2$

$\therefore\ a + p + q = -2 + 3 + 4 = 5$

22. 함수 $y = a\sqrt{x+b}+c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이 그래프와 x축의 교점의 좌표는? (단, $a,\ b,\ c$ 는 상수)



① $\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$ ② $\left(-\frac{4}{3},\ 0\right)$
③ $\left(-\frac{5}{3},\ 0\right)$ ④ $(-\sqrt{2},\ 0)$
⑤ $(-\sqrt{3},\ 0)$

해설

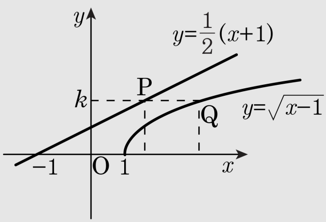
함수 $y = a\sqrt{x+b}+c$ 의 그래프는
함수 $y = a\sqrt{x}$ 의 그래프를
x축의 방향으로 $-b$ 만큼, y축의 방향으로
c만큼 평행 이동시킨 것이므로
$b = 2\ ,\ c = -1$
$\therefore\ \ y = a\sqrt{x+b}+c = a\sqrt{x+2}-1$
한편, 이 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지나므로
$1 = a\sqrt{0+2}-1$
$\therefore\ \ a = \sqrt{2}$
따라서, 함수 $y = \sqrt{2}\sqrt{x+2}-1$ 의 그래프와
x축의 교점의 x좌표를 구하면
$0 = \sqrt{2}\sqrt{x+2}-1$
$$\sqrt{x+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$x+2 = \frac{1}{2}$$
$$\therefore\ \ x = -\frac{3}{2}$$

23. 직선 $y = \frac{1}{2}(x+1)$ 위의 한 점 P에서 x축에 평행한 직선을 그어 무리함수 $y = \sqrt{x-1}$의 그래프와 만나는 점을 Q라 할 때, $\overline{PQ}$의 최솟값을 구하면?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

무리함수 $y = \sqrt{x-1}$의 그래프와
직선 $y = \frac{1}{2}(x+1)$을 좌표평면 위에
나타내면 다음 그림과 같다.



그림에서와 같이 점 P 의 y 좌표를 k 라 하면

① 점 P의 x좌표는 $k = \frac{1}{2}(x+1)$에서

$x = 2k - 1$

② 점 Q의 x좌표는 $k = \sqrt{x-1}$ 에서

$x = k^2 + 1$

$\therefore\ \overline{PQ} = | k^2 + 1 - (2k-1) |$

$= | k^2 - 2k + 2 |$

$= | (k-1)^2 + 1 | \geq 1$

따라서, $\overline{PQ}$ 의 최솟값은 1이다.

24. 집합 $A_a = \{x \mid x$는 a의 배수$\}$, 집합 $B_b = \{x \mid x$는 b의 약수$\}$ 라고 할 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

① $A_2 \subset A_4$ ② $B_2 \subset B_4$ ③ $A_4 = B_4$

④ $n(B_{15}) = 5$ ⑤ $A_8 \subset A_4 \subset A_2$

해설

$A_2 = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12, \cdots\}$

$A_4 = \{4,\ 8,\ 12,\ 16, \cdots\}$

$A_8 = \{8,\ 16,\ 24, \cdots\}$

$B_2 = \{1,\ 2\}$

$B_4 = \{1,\ 2,\ 4\}$

$B_{15} = \{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$

① $A_4 \subset A_2$ ③ $A_4 \neq B_4$ ④ $n(B_{15}) = 4$

25. 다음 $\square$ 안에 알맞은 세 자연수의 합을 구하여라.

보기

㉠ $n(\{x|x$는 $\square$미만의 자연수$\}) = 4$

㉡ $n(\{a,\ b,\ c,\ d\}) - n(\{b,\ c,\ d\}) = \square$

㉢ $A \subset \{1,\ 2,\ 3\}$ 이고, $n(A) = 2$ 를 만족하는 집합 A 의 개수는 $\square$ 개이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

㉠ $n(\{x|x$는 5 미만의 자연수$\}) = 4$

㉡ $n(\{a,\ b,\ c,\ d) - n(\{b,\ c,\ d\}) = 1$

㉢ $A \subset \{1,\ 2,\ 3\}$ 이고, $n(A) = 2$ 를 만족하는 집합 A 는 $\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{2,\ 3\}$ 의 3 개

$\therefore 5 + 1 + 3 = 9$

26. 집합 $N = \{n_1, n_2, \cdots, n_7\}$ 의 부분집합 중에서 n_1, n_3, n_7 중 적어도 하나를 포함하는 부분집합의 개수는?

① 3×2^4 ② 4×2^4 ③ 7×2^4 ④ 8×2^4 ⑤ 5×2^5

해설

n_1, n_3, n_7 중 적어도 하나를 포함하는 N 의 부분집합은 n_1, n_3, n_7 을 하나도 포함하지 않는 부분집합의 여집합이므로 $2^7 - 2^4 = 2^4\left(2^3 - 1\right) = 7 \times 2^4$

27. x, y가 실수이고 A, B, C를 집합이라 할 때 조건 p 가 조건 q이기 위한 필요충분조건은?

① $p : x+y \geq 2$, $q : x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$

② $p : |x|+|y|=0$, $q : 3\sqrt{x}+3\sqrt{y}=0$

③ $p : xy+1 > x+y > 2$, $q : x > 1$ 이고 $y > 1$

④ $p : A \subset B \subset C$, $q : A \subset B$ 또는 $A \subset C$

⑤ $p : x+y$ 가 유리수이다. $q : x$, y 모두 유리수이다.

해설

① $x+y \geq 2$ $\quad x \geq 1$ 또는 $y \geq 1$ (충분조건) (반례 : $x=3$, $y=-3$)

② $|x|+|y|=0 \;\Rightarrow\; {}^{3}\sqrt{x}+{}^{3}\sqrt{y}=0$

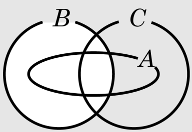
여기서 $|x|+|y|=0$ 은 $x=0$, $y=0$ 과 같으므로

$x=0$, $y=0 \rightarrow {}^{3}\sqrt{x}+{}^{3}\sqrt{y}=0$ (충분조건)

(반례 : $x=8$, $y=-8$)

③ $xy+1 > x+y > 2 \;\Leftrightarrow\; x > 1$ 이고 $y > 1$

④ $A \subset B \cup C \leftarrow A \subset B$ 또는 $A \subset C$ (충분조건)



⑤ $x+y$ 가 유리수이다. $\leftarrow x$, y 모두 유리수이다.

(필요조건) (반례 : $x=1+\sqrt{2}$, $y=1-\sqrt{2}$)

28. $f\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)=3x-1$ 을 만족하는 $f(x)$ 에 대하여, $f^{-1}(11)$ 의 값은?

① -4　② -3　③ -2　④ -1　⑤ 0

해설

$f^{-1}(3x-1)=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ 이므로

$3x-1=11$ 에서 $x=4$

$$\therefore\ f^{-1}(11)=\frac{1+\sqrt{4}}{1-\sqrt{4}}=-3$$

29. $\frac{2}{x} - z = 1$, $y - \frac{1}{z} = 1$일 때, xyz의 값은?

① -2 ② -1 ③ 4 ④ 3 ⑤ 2

해설

$$\frac{2}{x} - z = 1 \Rightarrow x = \frac{2}{z+1}$$

$$y - \frac{1}{z} = 1 \Rightarrow y = \frac{z+1}{z}$$

$$\therefore xyz = \frac{2}{z+1} \times \frac{z+1}{z} \times z = 2$$

30. 어느 학급에서 '자주 먹는 고기의 종류'를 조사한 결과, 모든 학생이 닭고기, 돼지고기, 소고기 중 적어도 하나의 고기를 선택하였다. 닭고기를 선택한 학생은 31 명, 돼지고기를 선택한 학생은 27 명, 소고기를 선택한 학생은 23 명이었다. 또, 세 종류의 고기 중 한 종류만 선택한 학생 중 14 명은 닭고기를, 15 명은 돼지고기를, 9 명은 소고기를 선택하였다. 세 종류의 고기를 모두 선택한 학생이 7 명일 때, 이 학급의 학생 수를 구하여라.

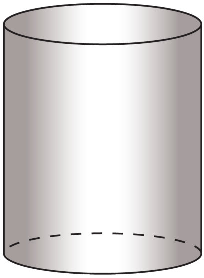
▶ 답 : ______ 명

▷ 정답 : 56 명

해설

닭고기를 선택한 학생의 집합을 A , 돼지고기를 선택한 학생의 집합을 B , 소고기를 선택한 학생의 집합을 C 라 두면,
닭고기만을 선택한 학생 수는 $n(A)-n(A\cap B)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)=14$,
돼지고기만을 선택한 학생 수는 $n(B)-n(A\cap B)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)=15$,
소고기만을 선택한 학생 수는 $n(C)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)=9$,
위의 세 식을 모두 더하면,
$n(A)+n(B)+n(C)-2(n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A))+3n(A\cap B\cap C)=38$,
$n(A)=31, n(B)=27, n(C)=23, n(A\cap B\cap C)=7$ 이므로
$31+27+23-2(n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A))+21=38$
$\rightarrow n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)=32$
모든 학생이 닭고기, 돼지고기, 소고기 중 적어도 하나의 고기를 선택하였으므로,
$n(U)=n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-(n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A))+n(A\cap B\cap C)$
$=31+27+23-32+7=56$

31. 사각형 모양의 철판 세 장을 구입하여, 두 장은 원 모양으로 오려 아랫면과 윗면으로, 나머지 한 장은 몸통으로 하여 오른쪽 그림과 같은 원기둥 모양의 보일러를 제작하려 한다. 철판은 사각형의 가로와 세로의 길이를 임의로 정해서 구입할 수 있고, 철판의 가격은 $1\,\mathrm{m}^2$ 당 1만원이다. 보일러의 부피가 $64\,\mathrm{m}^3$가 되도록 만들기 위해 필요한 철판을 구입하는데 드는 최소 비용은?



① 110만원 ② 104만원 ③ 100만원
④ 96만원 ⑤ 90만원

해설

그림과 같이 원기둥의 밑면의 반지름 길이를 x, 높이를 y라 하면,

부피 V는 $V = \pi x^2 y = 64 \cdots\cdots$ ㉠

철판의 넓이를 S라 하면

$S = (2x)^2 \times 2 + 2\pi xy = 8x^2 + 2x\pi y$

$= 8x^2 + 2x \times \dfrac{64}{x^2} = 8x^2 + \dfrac{128}{x}$

$= 8x^2 + \dfrac{64}{x} + \dfrac{64}{x} \geq 3\sqrt[3]{8x^2 \times \dfrac{64}{x} \times \dfrac{64}{x}} = 96$

단, 등호는 $8x^2 = \dfrac{64}{x}$일 때,

곧 $x = 2$일 때 성립한다.

따라서, 철판의 최소 비용은 96만원이다.