1. 집합 $A = \{\varnothing,\ 1,\ 2,\ \{1,\ 2\}\}$ 일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\varnothing \in A$　　② $\{1, 2\} \subset A$　　③ $\{1, 2\} \in A$

④ $\varnothing \subset A$　　⑤ $n(A) = 5$

해설

⑤ $n(A) = 4$

2. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면?(답 2 개)

① $A \cup A = A$

② $A \cup \varnothing = \varnothing$

③ $(A \cap B) \subset B$

④ $B \subset A$ 이면 $A \cap B = A$

⑤ $B \subset (A \cup B)$

해설

② $A \cup \varnothing = A$

④ $B \subset A$ 이면 $A \cap B = B$

3. 두 집합 $A = \{1, a-3, 4\}$, $B = \{1, 4, a\}$ 에 대하여 $B - A = \{6\}$ 일 때, a 의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$(B - A) \subset B$ 이므로 $a = 6$ 이다.

4. 두 함수 $f(x) = 2x - 5, g(x) = -x + 3$ 에 대하여 $(f^{-1} \circ g^{-1})(2)$ 의 값은 얼마인가?

① 3　　② $-\frac{5}{2}$　　③ -1　　④ $\frac{3}{2}$　　⑤ 3

해설

$f(x) = 2x - 5, g(x) = -x + 3$ 에 대하여
$(f^{-1} \circ g^{-1})(2) = f^{-1}(g^{-1}(2))$ 이므로
$g^{-1}(2) = k$ 로 놓으면 $g(k) = 2$
$-k + 3 = 2$ 에서 $k = 1$
$(f^{-1} \circ g^{-1})(2) = f^{-1}(1) = m$ 으로 놓으면,
$f(m) = 1$ 에서 $2m - 5 = 1$
$\therefore m = 3$

5. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 일대일대응인 세 함수 $f,\ g,\ h$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은 무엇인가? (단, I 는 항등함수)

보기

㉠ $f \circ g = g \circ f$

㉡ $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

㉢ $(f \circ g \circ h)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \circ h^{-1}$

㉣ $f \circ g = I$ 이면 $g = f^{-1}$ 이다.

① ㉠, ㉡　　② ㉡, ㉣　　③ ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉡, ㉣　　⑤ ㉡, ㉢, ㉣

해설

㉠ 일반적으로 함수의 합성에서
교환법칙은 성립하지 않는다.
∴ 옳지 않다.

㉡ 함수의합성에서 결합법칙은 성립한다.
∴ 옳다.

㉢ $(f \circ g \circ h)^{-1}$
$= ((f \circ g) \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ (f \circ g)^{-1}$
$= h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}$
∴ 옳지 않다.

㉣ $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$ 이므로
$f \circ g = I$ 에서 $f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ I = f^{-1}$
∴ $g = f^{-1}$　∴ 옳다.

6. $x : y = 3 : 4$일 때, $\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 - xy}$의 값을 구하면 $\dfrac{n}{m}$ (m, n은 서로소인 정수)이다. 이때, $m + n$의 값을 구하면?

① 10　　② 12　　③ 14　　④ 16　　⑤ 18

해설

$x : y = 3 : 4$일 때, $x = \dfrac{3}{4}y$이므로

$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 - xy} = \frac{\frac{9}{16}y^2 - y^2}{\frac{9}{16}y^2 - \frac{3}{4}y^2} = \frac{7}{3}$$

$\therefore\ m = 3,\ n = 7$

7. 1초에 120바이트를 송신하는 전자 통신망(PC 통신)이 있다. 1블럭을 512바이트라 할 때, 다음 중 60블럭 크기의 자료를 송신하는 데 소요되는 시간의 근삿값은?

① 0.04초 ② 0.4초 ③ 4초

④ 4분 ⑤ 4시간

해설

60(블럭)$= 60 \times 512$ (바이트)이므로

$$(\text{소요 시간}) = \frac{60 \times 512}{120} = 256(\text{초})$$

$$= \frac{256}{60}(\text{분}) \fallingdotseq 4(\text{분})$$

8. $a<0,\ b<0$일 때, 다음 중 옳은 것을 고르면?

① $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$

② $\dfrac{\sqrt{b}}{a}=\sqrt{\dfrac{b}{a^2}}$

③ $\sqrt{a^2b^2}=ab$

④ $\sqrt{-ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$

⑤ $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$

해설

① $\sqrt{a^2b}=-a\sqrt{b}$

② $\sqrt{\dfrac{b}{a^2}}=\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a^2}}=\dfrac{\sqrt{b}}{-a}$

③ $\sqrt{a^2b^2}=\sqrt{a^2}\sqrt{b^2}=(-a)(-b)=ab$

④ $\sqrt{-ab}=\sqrt{-a}\sqrt{b}=\sqrt{(-1)a}\ \sqrt{b}$
$=-\sqrt{-1}\sqrt{a}\sqrt{b}=-\sqrt{a}\sqrt{b}i$

⑤ $\sqrt{ab}=-\sqrt{a}\sqrt{b}$

9. $x = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$, $y = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ 일 때, $x^3 + y^3$ 의 값은?

① $8\sqrt{3}$ ② $24\sqrt{3}$ ③ $30\sqrt{3}$ ④ 48 ⑤ 52

해설

$x = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$,

$y = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$

$x+y=4, \quad xy=1$

$$\begin{aligned} x^3+y^3 &= (x+y)^3 - 3xy(x+y) \\ &= 4^3 - 3\times 4 = 52 \end{aligned}$$

10. $y = \sqrt{4x-12}+5$ 의 그래프는 함수 $y = 2\sqrt{x}$ 의 그래프를 x 축으로 a, y 축으로 b만큼 평행이동한 것이다.$a+b$ 의 값을 구하여라.

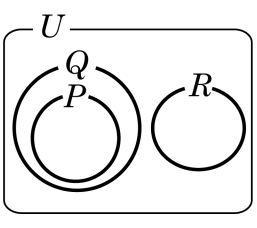
▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = 2\sqrt{x-3}+5$ 이므로,
이것은 $y = 2\sqrt{x}$ 의 그래프를
x 축 방향으로 3만큼,
y 축 방향으로 5만큼 평행이동한
그래프의 함수이다.
즉, $a = 3,\ b = 5$
$\therefore\ a+b = 8$

11. 전체집합 U 에서 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 할 때, 세 집합 사이의 포함 관계가 다음 그림과 같다.



이때, 다음 명제 중 참인 것은?

① $q \to r$

② $r \to \sim p$

③ (q 또는 r) $\to \sim p$

④ ($\sim q$ 이고 r) $\to p$

⑤ $p \to$ ($\sim q$ 또는 r)

해설

② 주어진 벤 다이어그램에서 $R \subset P^c$ 이므로 $r \to \sim p$ 는 참인 명제이다.

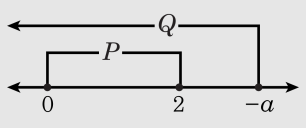
12. 실수 x에 대한 두 조건 p : $0 \le x \le 2$, q : $x + a \le 0$이 있다. 명제 $p \rightarrow q$가 참일 때, a의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 하면 $p \rightarrow q$가 참이므로 $P \subset Q$ 이다. $P = \{x | 0 \le x \le 2\}$, $Q = \{x | x \le -a\}$



위의 그림에서 $P \subset Q$이려면 $2 \le -a$, $a \le -2$ 따라서 a의 최댓값은 -2

13. 다음 명제 중 그 역이 참인 것은?

① $|a| = a$ 이면 $a < 0$ 이다.

② $xy \le 0$ 이면 $x \le 0$ 또는 $y \le 0$ 이다.

③ a, b 가 짝수이면 $a + b$ 는 짝수이다.

④ $x = y$ 이면 $ax = ay$ 이다.

⑤ $x = y = 0$ 이면 $x + y = 0$ 이고 $xy = 0$ 이다.

해설

각 명제의 역을 구하면
① $a < 0$ 이면 $|a| = a$ 이다. (거짓)
(반례) $a = -1 < 0$ 이면 $|-1| = 1 \ne -1$
② $x \le 0$ 또는 $y \le 0$ 이면 $xy \le 0$ 이다. (거짓)
(반례) $x = -1$, $y = -1$ 이면 $xy > 0$ 이다.
③ $a + b$ 가 짝수이면 a, b 가 짝수이다. (거짓)
(반례) $a = 1, b = 3$ 일 때, $a + b$ 는 짝수이지만 a, b 는 홀수이다.
④ $ax = ay$ 이면 $x = y$ 이다. (거짓)
(반례) $a = 0, x = 1, y = 2$ 일 때, $ax = ay$ 이지만 $x \ne y$ 이다.
⑤ $x + y = 0$ 이고 $xy = 0$ 이면 $x = y = 0$ 이다. (참)

14. 명제 $p \to \sim q$ 와 $\sim p \to r$ 가 모두 참일 때, 다음 중에서 반드시 참이라고 할 수 <u>없는</u> 것은?

① $q \to \sim p$　　② $\sim r \to p$　　③ $q \to r$

④ $\sim r \to \sim q$　　⑤ $q \to \sim r$

해설

$p \to \sim q$ 가 참이면 대우

$\underset{㉠}{\underline{q \to \sim p}}$(①) 도 참이다.

$\underset{㉡}{\underline{\sim p \to r}}$ 가 참이면 대우 $\sim r \to p$(②) 도 참이다.

㉠, ㉡에서 $q \to \sim p$ 가 참이고 $\sim p \to r$ 가 참이므로 $q \to r$(③) 도 참이다.
또한, $q \to r$ 가 참이므로 대우인 $\sim r \to \sim q$(④) 도 참이다.
따라서, 반드시 참이라고 할 수 없는 것은 ⑤이다.

15. 서로 다른 두 양수 a, b 에 대하여 다음 중 <u>옳은</u> 것은? (단, $a \neq b$)

① $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$　　② $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

③ $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$　　④ $\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab} \leq \frac{2ab}{a+b}$

⑤ $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

해설

$a > 0$, $b > 0$ 일 때, 산술·기하·조화·평균의 관계에서

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$ (등호는 $a = b$ 일 때 성립)

그런데 문제의 조건에서 $a \neq b$ 이므로

$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$

16. m이 실수 일 때, $2m^2+\frac{8}{m^2}-2 \geq k$를 만족하는 k의 최댓값을 구하시오. (단, $m \neq 0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

m이 실수이고, $m \neq 0$이므로 $m^2 > 0$이다.

따라서, $2m^2+\frac{8}{m^2}-2 \geq 2\sqrt{2m^2 \cdot \frac{8}{m^2}}-2$

$= 2\sqrt{16}-2 = 8-2 = 6$

17. 두 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Y = \{y \mid y$는 정수$\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수 f가 $f(n) = (n^3$을 7로 나눈 나머지$)$로 정의할 때, 치역의 모든 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$1^3 = 1$
즉 나머지 : 1
$2^3 = 7 \times 1 + 1$
즉 나머지 : 1
$3^3 = 27 = 7 \times 3 + 6$
즉 나머지 : 6
$4^3 = 64 = 7 \times 9 + 1$
즉 나머지 : 1
$5^3 = 125 = 7 \times 17 + 6$
즉 나머지 : 6
따라서 치역은 $\{1,\ 6\}$
$\therefore$ 치역의 모든 원소의 합은 7이다.

18. 집합 $X = \{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 함수 $f : X \ \rightarrow \ X$ 가 일대일대응이고, $f(2) = 3,\ (f \circ f)(2) = 1$ 를 만족할 때, $2f(1) + f(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$(f \circ f)(2) = f(f(2)) = f(3) = 1\ (\because f(2) = 3\ )$
함수 f 가 일대일 대응이므로 $f(1) = 2$ 이다.
$\therefore 2f(1) + f(3) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$

19. 다음 중 $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$을 간단히 한 것은?

① $\frac{2}{13}$ ② $\frac{4}{13}$ ③ $\frac{5}{14}$ ④ $\frac{23}{30}$ ⑤ $\frac{31}{42}$

해설

$\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$

$=\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\frac{1}{5\times6}+\frac{1}{6\times7}$

$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)$

$=\frac{1}{2}-\frac{1}{7}=\frac{5}{14}$

20. 분수식 $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}}}$ 을 간단히 하면?

① $\sqrt{2}$　　② $\sqrt{2}-1$　　③ $\sqrt{2}+1$

④ $2\sqrt{2}$　　⑤ 1

해설

$$\frac{1}{\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)-1}=-1$$

$$\therefore (\text{준 식})=\frac{1}{\sqrt{2}-(-1)}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$=\sqrt{2}-1$$

21. $a+b+c=0, abc \neq 0$일 때, $\frac{a^2+2}{bc}+\frac{b^2+2}{ca}+\frac{c^2+2}{ab}$의 값을 구하면?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

$\frac{a^2+2}{bc}+\frac{b^2+2}{ca}+\frac{c^2+2}{ab}$

$=\frac{a(a^2+2)+b(b^2+2)+c(c^2+2)}{abc}$

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$a+b+c=0$이므로, $a^3+b^3+c^3=3abc$

(준 식) $=\frac{a^3+b^3+c^3+2(a+b+c)}{abc}$

$=\frac{3abc}{abc}=3$

22. $a \le x \le 1$ 일 때, $y = \sqrt{3-2x}+1$ 의 최솟값이 m, 최댓값이 6 이다. 이때, $m-a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

함수 $y = \sqrt{3-2x}+1 = \sqrt{-2\left(x-\frac{3}{2}\right)}+1$ 는

$y = \sqrt{-2x}$ 를 x 축의 양의 방향으로 $\frac{3}{2}$ 만큼,

y축의 양의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로

이 함수는 감소함수이다.

따라서, $x = a$에서 최댓값을 가지므로

$6 = \sqrt{3-2a}+1 \Leftrightarrow \sqrt{3-2a} = 5$

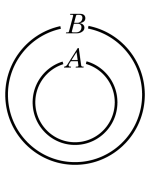
$\therefore a = -11$

또한, $x = 1$에서 최솟값을 가지므로

$m = \sqrt{3-2\times 1}+1 = 2$

$\therefore m-a = 13$

23. 두 집합 $A = \{x \mid x$는 18의 배수$\}$, $B = \{x \mid x$는 a의 배수$\}$ 의 관계가 다음의 벤 다이어그램과 같을 때, a 의 값으로 들어 갈 수 <u>없는</u> 것은?



① 1 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12

해설

$A \subset B$ 이므로 a 는 18 의 약수

$\therefore\ a = 1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18$

24. 집합 $A = \{x \mid x$는 4의 약수$\}$ 의 부분집합을 X 라고 하자. 집합 X 의 모든 원소들의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 28

해설

$A = \{1,\ 2,\ 4\}$

X : $\varnothing$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{4\}$, $\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 4\}$,
$\{2,\ 4\}$, $\{1,\ 2,\ 4\}$

집합 X 의 원소들의 합에는 1, 2, 4 가 각각 4 번씩 더해지므로
$(1+2+4)\times 4 = 28$

25. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면?

① $A \subset B$이면 $A \cap B = A$이다.

② $A \subset B$이면 $A^c \subset B^c$이다.

③ $B - A = A^c \cap B$

④ $A \cap \varnothing^c = A$

⑤ $U - \varnothing = A \cap A^c$

해설

② $A \subset B$이면 $A^c \supset B^c$이다.
④ $A \cap \varnothing^c = A \cap U = A$
⑤ $U - \varnothing = U = A \cup A^c$

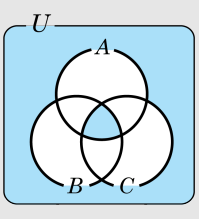
26. 전체집합 $U = \{x | x$는 30이하의 자연수$\}$ 의 세 부분집합
$A = \{x | x$는 30이하의 6의 배수$\}$,
$B = \{x | x$는 30이하의 9의 배수$\}$,
$C = \{9,\ 12,\ 18,\ 20,\ 25\}$ 에 대하여 $A \triangle B = (A \cap B) \cup (A \cup B)^c$ 일 때,
$n((A \triangle B) \cap (A \triangle C))$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 22

해설

$(A \triangle B) \cap (A \triangle C)$ 를 벤 다이어그램에 나타내면 다음과 같다.



$n(A \cap B \cap C) = 1,\ n((A \cup B \cup C)^c) = 21$
$\therefore\ n((A \triangle B) \cap (A \triangle C)) = 1 + 21 = 22$

27. 세 양수 a, b, c가 $abc = 1$ 을 만족할 때, 이 사실로부터 추론할 수 있는 것을 보기에서 모두 고르면?

Ⅰ. $a+b+c \geq 3$ Ⅱ. $a^2+b^2+c^2 \geq 3$ Ⅲ. $ab+bc+ca \geq 3$ Ⅳ. $(a+1)(b+1)(c+1) \geq 8$

① Ⅰ, Ⅱ　② Ⅰ, Ⅲ　③ Ⅲ, Ⅳ
④ Ⅰ, Ⅲ, Ⅳ　⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

해설

$abc = 1$ 이므로
Ⅰ. $a+b+c \geq 3 \times \sqrt[3]{abc} = 3$
Ⅱ. $a^2+b^2+c^2 \geq 3\sqrt[3]{a^2 \times b^2 \times c^2} = 3$
Ⅲ. $ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{ab \times bc \times ca} = 3$
Ⅳ. $(a+1)(b+1)(c+1)$
$= abc + (ab+bc+ca) + (a+b+c) + 1$
$\geq 1+3+3+1 = 8$

28. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f,\ g$가 $f(x) = ax + b,\ g(x) = 2x^2 + 3x + 1$이고, 모든 실수 x에 대하여 $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$를 만족할 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10)$의 값은?(단, $a \neq 0$)

① 60　② 55　③ 51　④ 48　⑤ 45

해설

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = a(2x^2 + 3x + 1) + b$
$= 2ax^2 + 3ax + a + b \cdots\cdots$ ㉠
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2(ax + b)^2 + 3(ax + b) + 1$
$= 2a^2x^2 + (4ab + 3a)x + 2b^2 + 3b + 1 \cdots\cdots$ ㉡
모든 실수 x에 대하여 ㉠ = ㉡이므로
$2a = 2a^2,\ 3a = 4ab + 3a,\ a + b = 2b^2 + 3b + 1$
위의 식을 연립하여 풀면 $a = 1,\ b = 0(\because a \neq 0)$
즉, $f(x) = x$이므로
$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10)$
$= 1 + 2 + 3 + \cdots + 10 = 55$

29. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4\}$ 의 두 부분집합이 A, B 일 때, 다음 각 조건을 만족하는 집합의 순서쌍 (A, B) 의 개수를 구하여라.

(1) $A \cap B = \varnothing$
(2) $A \cup B = U$

▶ 답 : _____ 개

▷ 정답 : 16 개

해설

$A \cap B = \varnothing$ 이고 $A \cup B = U$ 이면 $n(A) + n(B) = n(U) = 4$
$n(A) = 0,\ n(B) = 4$ 인 경우 : 1 개
$n(A) = 1,\ n(B) = 3$ 인 경우 : 4 개
$n(A) = 2,\ n(B) = 2$ 인 경우 : 6 개
$n(A) = 3,\ n(B) = 1$ 인 경우 : 4 개
$n(A) = 4,\ n(B) = 0$ 인 경우 : 1 개
따라서 순서쌍 (A, B) 의 개수는 $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$ (개)

30. 함수 $y = f(x)$의 역함수를 $y = g(x)$라고 할 때, 다음 중 함수 $f(3x-2)$의 역함수는?

① $\frac{1}{3}\{g(x)+2\}$ ② $\frac{1}{3}\{g(x)-2\}$ ③ $3g(x)-2$
④ $3g(x)+2$ ⑤ $\frac{1}{2}\{g(x)-3\}$

해설

$y = f(3x-2)$의 역함수를 구하기 위하여 x, y를 바꾸면
$x = f(3y-2)$
$\therefore 3y-2 = f^{-1}(x) = g(x)$
$\therefore y = \frac{1}{3}\{g(x)+2\}$