1. 다음 등비수열의 일반항 a_n 은?

$2,\ 4,\ 8,\ 16, \cdots\cdots$

① $(-2)^n$ ② 2^{n-1} ③ 2^{n+1}

④ 2^n ⑤ $(-2)^{n-1}$

해설

주어진 수열은 첫째항이 2이고 공비가 2이므로 $a_n = 2^n$

2. 첫째항이 $\frac{1}{4}$, 끝항이 $\frac{1}{16}$, 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열의 항의 개수는?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$a_n = \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{16}$

$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2$

$n-1 = 2$

$n = 3$

3. 첫째항이 1, 공비가 –3인 항수가 5인 등비수열의 합은?

① 61 ② 122 ③ 244 ④ 361 ⑤ 722

해설

$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ 에서

$S_5 = \dfrac{1 \cdot \{1-(-3)^5\}}{1-(-3)} = 61$

4. 제 3 항이 6 이고 제 7 항이 96 인 등비수열의 첫째항과 공비의 곱을 구하여라. (단, 공비는 양수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

첫째항을 a, 공비를 r 이라 하면

$a_3 = ar^2 = 6 \cdots\cdots ㉠$

$a_7 = ar^6 = 96 \cdots\cdots ㉡$

㉡ ÷ ㉠에서 $r^4 = 16$

$r = \pm 2, \quad \therefore r = 2 \ (\because r > 0)$

㉠에 대입하면 $a = \dfrac{3}{2}$

첫째항은 $\dfrac{3}{2}$, 공비는 2 이므로 곱은 3

5. 등비중항의 성질을 이용하여 다음 수열이 등비수열이 되도록 할 때, □안에 알맞은 수를 모두 더하면?

$-2,\ \square,\ -8,\ \square,\ \square,\ 64, \cdots$

① -11 ② -12 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

첫 번째 괄호를 b라 하면 $b^2 = (-2) \times (-8),\ b^2 = 16$
따라서 $b = 4$이고 공비는 -2인 수열이 되므로 구하는 수열은
$-2,\ 4,\ -8,\ 16,\ -32,\ 64,\ \cdots$
$\therefore\ 4 + 16 - 32 = -12$

6. 등비수열 $\sqrt{2}+1,\ 1,\ \sqrt{2}-1,\ 3-2\sqrt{2},\cdots$ 의 일반항을 a_n 이라 할 때, a_{100} 의 값은?

① $(\sqrt{2}-1)^{98}$ ② $(\sqrt{2}-1)^{99}$ ③ $(\sqrt{2}-1)^{100}$
④ $\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^{90}$ ⑤ $2(\sqrt{2}-1)^{90}$

해설

공비를 r 이라 하면 $r=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{1}=\sqrt{2}-1$

$\therefore\ a_n=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)^{n-1}$

$\therefore\ a_{100}=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)^{99}$
$=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)^{98}$
$=(\sqrt{2}-1)^{98}$

7. 등비수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 = x-3,\ a_2 = x,\ a_3 = x+6$이 성립할 때, a_5의 값은?

① 16 ② 24 ③ 32 ④ 48 ⑤ 52

해설

x는 $x-3$과 $x+6$의 등비중항이므로
$x^2 = (x-3)(x+6) = x^2 + 3x - 18$
$3x = 18 \ \therefore x = 6$
즉, $a_1 = 3,\ a_2 = 6,\ a_3 = 12$이므로 수열 $\{a_n\}$은 공비가 2인 등비수열이다.
$\therefore a_5 = 3 \cdot 2^4 = 3 \cdot 16 = 48$

8. 9와 144 사이에 세 자연수를 넣어서 이들 5개의 수가 등비수열을 이루도록 할 때, 사이에 들어갈 세 수 중 가장 큰 수는?

① 36 ② 45 ③ 54 ④ 63 ⑤ 72

해설

첫째항을 9, 공비를 r이라 하면 사이에 들어갈 세 자연수를 각각 $9r,\ 9r^2,\ 9r^3$으로 놓을 수 있다.
이때, $9r^4 = 144$이므로 $r^4 = 16$
$r^4 - 16 = 0,\ (r^2+4)(r^2+2)(r^2-2) = 0$
그런데 세 수는 자연수이므로 $r = 2$
따라서 세 수는 18, 36, 72이고, 이 중 가장 큰 수는 72이다.

9. 서로 다른 세 수 a, b, c가 이 순서로 등비수열을 이루고 있다. b와 c 사이에 두 수를 넣어 5개의 수가 등차수열을 이루도록 하였다. 이때, $\frac{b+c}{a}$의 값은?

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

해설

b와 c사이에 두 수를 넣어 만들어진 등차수열의 공차를 d라 하면
$b = a + d,\ c = a + 4d \cdots ㉠$
세 수 a, b, c가 등비수열을 이루므로
$(a+d)^2 = a(a+4d)$
$a^2 + 2ad + d^2 = a^2 + 4ad$
$\therefore\ d = 2a$
㉠에서 $b = 3a,\ c = 9a$
$\therefore\ \frac{b+c}{a} = \frac{3a+9a}{a} = 12$

10. 수열 $a(1+r)+a(1+r)^2+a(1+r)^3+\cdots+a(1+r)^n$ 의 합은? (단, $r \neq 0$)

① $\dfrac{2a+4r^n}{r}$
② $\dfrac{a(1+r)\left\{(1+r)^n-1\right\}}{r}$
③ $\dfrac{a(1+r)+(1+r)^n}{r}$
④ $\dfrac{a(1+r)\left\{(1+r)^{2n}-1\right\}}{r}$
⑤ $\dfrac{a(1+r)-r^n+2}{r}$

해설

첫째항이 $a(1+r)$, 공비가 $1+r$, 항수가 n인 등비수열의 합이므로 $1+r \neq 1$ 즉, $r \neq 0$ 일 때,

$$S=\frac{a(1+r)\left\{(1+r)^n-1\right\}}{(1+r)-1}$$

$$=\frac{a(1+r)\left\{(1+r)^n-1\right\}}{r}$$

11. 첫째항부터 제3항까지의 합이 7, 제4항부터 제6항까지의 합이 56인 등비수열이 있다. 이 수열의 첫째항부터 제9항까지의 합은? (단, 공비는 실수이다.)

① 498 ② 502 ③ 511 ④ 512 ⑤ 524

해설

첫째항을 a, 공비를 r이라 하고, 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$S_3 = \dfrac{a(r^3-1)}{r-1} = 7 \cdots ㉠$

$S_6 = \dfrac{a(r^6-1)}{r-1} = \dfrac{a(r^3-1)(r^3+1)}{r-1} = 63 \cdots ㉡$

㉠을 ㉡에 대입하면 $7(r^3+1) = 63$

$r^3+1 = 9 \quad \therefore r = 2$

$r = 2$를 ㉠에 대입하면 $a(2^3-1) = 7 \quad \therefore \ a = 1$

$S_9 = \dfrac{1 \cdot (2^9-1)}{2-1} = 512 - 1 = 511$

12. 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 10항까지의 합이 5, 첫째항부터 제 20항까지의 합이 30일 때, 첫째항부터 제 30항까지의 합은?

① 124 ② 132 ③ 145 ④ 155 ⑤ 162

해설

$$S_{10} = \frac{a(r^{10}-1)}{r-1} = 5$$

$$S_{20} = \frac{a(r^{20}-1)}{r-1} = \frac{a(r^{10}-1)(r^{10}+1)}{r-1} = 30$$

$r^{10}+1 = 6$이므로 $r^{10} = 5$

$$S_{30} = \frac{a(r^{30}-1)}{r-1}$$

$a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$이므로

$$\begin{aligned} S_{30} &= \frac{a(r^{10}-1)(r^{20}+r^{10}+1)}{r-1} \\ &= 5\cdot(r^{20}+r^{10}+1) \\ &= 5\cdot(5^2+5+1) \\ &= 5\cdot 31 = 155 \end{aligned}$$

13. 첫째항이 1 이고, 공비가 4 인 등비수열에서 첫째항부터 몇 항까지의 합이 처음으로 1000 보다 크게 되는가?
(단, $\log 2 = 0.3010$, $\log 3 = 0.4771$)

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

첫째항이 1, 공비가 4 인 등비수열이므로

$$S_n = \frac{1 \cdot (4^n - 1)}{4 - 1} > 1000,\ 4^n > 3001$$

$$2n \log 2 > \log 3001$$

$$n > \frac{\log 3001}{2 \log 2} > \frac{\log 3000}{2 \log 2}$$

$$= \frac{\log 3 + \log 1000}{2 \log 2} = \frac{3.4771}{0.6020} = 5.7 \times \times \times$$

14. 가로의 길이, 세로의 길이, 높이가 각각 a, b, c인 직육면체에 대하여 a, b, c는 이 순서대로 등비수열을 이룬다. 이 직육면체의 모서리의 길이의 총합이 60, 겉넓이가 180일 때, 이 직육면체의 부피는?

① 174 ② 188 ③ 202 ④ 216 ⑤ 230

해설

등비수열 a, b, c의 공비를 r이라 하면 가로의 길이, 세로의 길이, 높이는 각각 a, ar, ar^2이다.
모서리의 길이의 총합은 $4(a+ar+ar^2)=60$에서
$a(1+r+r^2)=15\cdots$㉠
또, 겉넓이는 $2(a\cdot ar+a\cdot ar^2+ar\cdot ar^2)=180$에서
$a^2r(1+r+r^2)=90\cdots$㉡
㉡÷㉠에서 $ar=6$
따라서 직육면체의 부피 V는
$V=a\cdot ar\cdot ar^2=a^3r^3=(ar)^3=6^3=216$

15. 집합 {2, 4, 6, 8, 10, 12}에서 선택한 세 개의 원소 a_1, a_2, a_3이 $2a_2 = a_1 + a_3$을 만족시키는 경우의 수는? (단, $a_1 < a_2 < a_3$이다.)

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설

$2a_2 = a_1 + a_3$ ⇒ 등차수열

① 공차가 2인 경우 (4가지)
2, 4, 6　4, 6, 8　6, 8, 10　8, 10, 12

② 공차가 4인 경우 (2가지)
2, 6, 10　4, 8, 12

16. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1 + a_2 = 11,\ a_3 + a_4 + a_5 = 54$가 성립할 때, a_{10}의 값은?

① 36 ② 39 ③ 42 ④ 45 ⑤ 48

해설

공차를 d라 하면 $a_1 + a_2 = 11$에서 $a_1 + \{a_1 + (2-1)d\} = 11$

$\therefore\ 2a_1 + d = 11 \cdots$㉠

$a_3 + a_4 + a_5 = 54$에서 $(a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) = 54$

$\therefore\ a_1 + 3d = 18 \cdots$㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a_1 = 3,\ d = 5$

$\therefore\ a_{10} = a_1 + 9d = 3 + 9 \times 5 = 48$

17. 다음 수열 $\{a_n\}$의 제 50항의 값은?

$2, 7, 12, 17, 22 \cdots$

① 227 ② 237 ③ 247 ④ 257 ⑤ 267

해설

주어진 수열은 첫째항이 2이고, 공차가 5인
등차수열이므로 $a_n = 5n - 3$
$\therefore a_{50} = 5 \cdot 50 - 3 = 247$

18. 등차수열 $-3,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7,\ 21$ 에 대하여 $x_4 + x_5$ 의 값은?

① 15 ② 17 ③ 19 ④ 21 ⑤ 23

해설

주어진 등차수열의 공차를 d라고 하면 21은 제 9항이므로
$21 = -3 + 8d \quad \therefore\ d = 3$
따라서, 주어진 수열은 첫째항이 -3, 공차가 3인 등차수열이고,
$x_4,\ x_5$은 각각 제 5항, 제 6항이므로
$x_4 = -3 + (5-1)\cdot 3 = 9$
$x_5 = -3 + (6-1)\cdot 3 = 12$
따라서 $x_4 + x_5$은 21이다.

19. 10과 26 사이에 세 수 b_1, b_2, b_3를 넣었더니 10, b_1, b_2, b_3, 26의 순서로 등차수열을 이루었다. 이때, b_2의 값은?

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

해설

10, b_1, b_2, b_3, 26이 순서대로 등차수열을 이루므로 10, b_2, 26도 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

$\therefore\ 10+26=2b_2 \quad \therefore\ b_2=18$

20. 두 수 $2p+1$과 $2p+5$의 등차중항이 p^2일 때, 양수 p의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

$2p+1$, p^2, $2p+5$가 등차수열을 이루므로 $p^2 = \dfrac{(2p+1)+(2p+5)}{2}$

$2p^2 = 4p+6$, $p^2-2p-3=0$

$(p+1)(p-3)=0$

따라서 $p=-1$ 또는 $p=3$

이때, p는 양수이므로 $p=3$

21. 두 수 3과 7의 등차중항을 a, 10과 -2의 등차중항을 b라 할 때, 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근의 차는?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

3과 7의 등차중항은 $a=\dfrac{3+7}{2}=5$

10과 -2의 등차중항은 $b=\dfrac{10+(-2)}{2}=4$

$x^2+ax+b=0$에서

$x^2+5x+4=0,\ (x+1)(x+4)=0$

$\therefore x=-1$ 또는 $x=-4$

따라서 두 근의 차는 3

22. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{\log_3 a_n\}$은 첫째항이 0, 공차가 $\frac{1}{2}$인 등차수열이다. 이때, $a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4$의 값은?

① 9 ② 12 ③ 18 ④ 27 ⑤ 32

해설

$\log_3 a_n = 0 + \frac{1}{2}(n-1)$

$a_n = 3^{\frac{1}{2}(n-1)}$

$a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4$

$= 3^0 \times 3^{\frac{1}{2}} \times 3^1 \times 3^{\frac{3}{2}}$

$= 3^{0+\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}} = 3^3 = 27$

23. 등차수열을 이루는 세 수의 합이 12이고, 곱이 28일 때, 세 수 중 가장 큰 수는?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

등차수열을 이루는 세 수를 $a-b,\ a,\ a+b$라 하면 세 수의 합이 12이므로

$(a-b)+a+(a+b)=12,\ 3a=12$

$\therefore a=4$

또한 세 수의 곱이 28이므로

$(4-d)\times 4\times(4+d)=28,\ 16-d^2=7$

$d^2=9\ \ \therefore d=\pm 3$

따라서 구하는 세 수는 $1, 4, 7$이므로 이 중 가장 큰 수는 7이다.

24. 4와 102 사이에 5개의 수를 넣어 등차수열을 만들려고 한다. 이때, 4와 102 사이에 넣을 5개의 수의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 265

해설

항의 개수가 7개 이므로 7개 항의 합을 S_7, 구하는 수의 합을 S라 하면

$S = S_7 - (4 + 102) = \frac{7(4 + 102)}{2} - 106 = 265$

25. 등차수열 30, x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_n, -10의 합이 210이 되도록 공차 d의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

첫째항이 30, 끝항이 -10이고 항수가 $n+2$인 등차수열의 합이 210이므로

$$\frac{(n+2)\{30+(-10)\}}{2}=210$$

$n+2=21 \quad \therefore n=19$

따라서 끝항은 주어진 수열의 제 21항이므로

$-10=30+(21-1)d \quad \therefore d=-2$

26. 첫째항이 -10인 등차수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제7항까지의 합과 제7항이 같을 때 첫째항부터 제10항까지의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 80

해설

$a_1 = -10,\ a_7 = -10 + 6d$

$S_7 = \dfrac{7\{2\cdot(-10) + 6d\}}{2},\ a_7 = S_7$에서 $d = 4$

$S_{10} = \dfrac{10\{2\cdot(-10) + 9\cdot 4\}}{2} = 80$

27. 표의 빈칸에 6개의 자연수를 하나씩 써 넣어 가로, 세로, 대각선 방향으로 각각 등차수열을 이루도록 할 때, 빈칸에 써 넣을 6개의 수의 합을 구하여라.

3		7
	11	

▶ 답:

▷ 정답: 51

해설

3	5	7
6	8	10
9	11	13

$\therefore 5+6+8+10+9+13=51$