1. A(1, 2), B(3, −2) 을 3 : 2로 외분하는 점 $C(a, b)$ 에 대하여 $a+b$ 의 값은?

① −3 ② −1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

외분점 구하는 공식을 이용한다.

C의 좌표는

$$\left(\frac{3\times3-2\times1}{3-2},\ \frac{3\times(-2)-2\times2}{3-2}\right)=(7,\ -10)$$

$\therefore\ a+b=-3$

2. 점 $(-5, -2)$ 를 지나고, y 축에 평행한 직선을 구하여라

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = -5$

해설

$(-5,\ -2)$ 를 지나고 y 축에 평행한 직선이므로
$\therefore x = -5$

3. 점 $(2,\ -3\ )$ 과 직선 $3x-4y+1=0$ 사이의 거리는?

① $\frac{19}{5}$ ② $\frac{14}{5}$ ③ $\frac{19}{4}$ ④ $\frac{16}{3}$ ⑤ $\frac{19}{7}$

해설

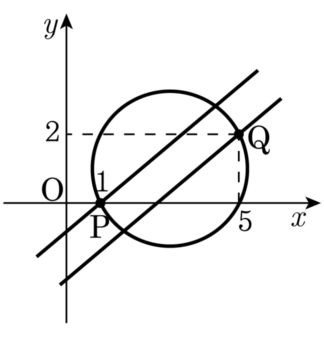
$\therefore\ d=\frac{|\,3\cdot 2-4\cdot(-3)+1\,|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{19}{5}$

4. 원 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ 의 반지름의 길이는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설
$x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$
$\Rightarrow (x+2)^2 + (y-1)^2 = 4 = 2^2$

5. 다음 그림과 같이 좌표평면에서 평행한 두 직선에 의해 원의 넓이가 3등분되었다. 원과 직선의 교점 P, Q의 좌표가 각각 $(1,0)$, $(5,2)$이고, 원의 반지름의 길이가 r일 때, r^2의 값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

평행한 두 직선에 의하여 원의 넓이가 3등분되었으므로
그림에서 두 점 P, Q는 원의 지름의 양 끝점이다.
따라서 구하는 원의 중심은 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 중점 C(3, 1)이므로,
$r^2 = \overline{\mathrm{PC}}^2 = (3-1)^2 + (1-0)^2 = 5$ 이다.

6. 좌표평면 위의 세 점 A(2, 0), B(3, a), C(4, 2)에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}}$ 일 때, a의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{BC}}$ 에서 $\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{BC}}^2$ 이므로

$(3-2)^2 + (a-0)^2 = (4-3)^2 + (2-a)^2$

$1 + a^2 = 1 + 4 - 4a + a^2$

$4a = 4 \qquad \therefore a = 1$

7. 곡선 $y=x^3$ 위의 서로 다른 세 점 A, B, C 의 x좌표를 각각 a, b, c라고 한다. 세 점 A, B, C가 일직선 위에 있을 때, 다음 중 항상 성립하는 것은?

① $a+b+c=0$　② $a+b+c=1$　③ $abc=1$

④ $a+c=2b$　⑤ $ac=b^2$

해설

서로 다른 세 점 $\mathrm{A}(a, a^3)$, $\mathrm{B}(b, b^3)$, $\mathrm{C}(c, c^3)$ 이 일직선 위에 있으므로 직선 AB의 기울기와 직선 AC의 기울기는 같다.

$\therefore \dfrac{b^3-a^3}{b-a} = \dfrac{c^3-a^3}{c-a}$

즉, $b^2+ab+a^2 = c^2+ac+a^2$

$(b-c)(a+b+c)=0$ 에서 $b \neq c$ 이므로

$a+b+c=0$

8. 다음 두 원의 위치관계 중 서로 다른 두 점에서 만나는 경우를 모두 고른 것은?

㉠ $x^2 + y^2 = 1, \quad (x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$
㉡ $(x+1)^2 + y^2 = 2, \quad x^2 + (y+3)^2 = 2$
㉢ $x^2 + y^2 = 2, \quad (x+1)^2 + (y-1)^2 = 8$
㉣ $x^2 + y^2 = 4, \quad (x-3)^2 + (y+4)^2 = 9$
㉤ $x^2 + y^2 - 2x = 0, \quad x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$

① ㉠　　② ㉠, ㉤　　③ ㉡
④ ㉢, ㉣　　⑤ ㉡, ㉤

해설

서로 다른 두 점에서 만나기 위해서는
$|r - r'| < d < |r + r'|$ 이어야 한다.
㉡ 만나지 않는다.
㉢ 내접한다.
㉣ 외접한다.

9. 점 $\mathrm{A}(2,\ 1)$를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 점이 $(a,\ b)$일 때, $a+b$의 값은?

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

해설

$(2-1,\ \ 1+4)=(a,\ b)$ 따라서 $a+b=6$

10. 다음은 직선 $x + ay + b = 0$이 제 1, 3, 4사분면을 지날 때, ab의 부호를 조사하는 과정이다.

$a = 0$이면 주어진 직선이 제 1, 3, 4사분면을 지날 수 없으므로 $a \neq 0$이다. 이 때, 직선 $y = -\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$에서 (기울기) (ㄱ) 0 ($y$ 절편) (ㄴ) 0 a (ㄷ) 0 b (ㄹ) 0 이므로 따라서 ab (ㅁ) 0

위의 (ㄱ) ~(ㅁ) 의 부호가 옳지 <u>않은</u> 것은?

① (ㄱ): $>$　② (ㄴ) : $<$　③ (ㄷ) : $<$
④ (ㄹ) : $<$　⑤ (ㅁ) : $<$

해설

직선 $y = -\frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$ 의 그래프가
제 1, 3, 4 사분면을 지나려면
기울기는 양수, y 절편은 음수이어야 한다.
(기울기)$= -\frac{1}{a} > 0$
(y 절편)$= -\frac{b}{a} < 0$
$a < 0,\ b < 0$이므로 $ab > 0$

11. 원 $x^2+y^2-8y-9=0$ 위의 점 P에서 직선 $3x-4y-24=0$ 까지의 거리의 최솟값은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$x^2+y^2-8y-9=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+(y-4)^2=5^2$ 이므로
원의 중심은 $(0,\ 4)$ 이고, 반지름은 5이다.
그런데 중심 $(0,\ 4)$ 에서 직선 $3x-4y-24=0$ 까지의 거리를 d 라 하면

$$d=\frac{|3\cdot 0-4\cdot 4-24|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{40}{5}=8$$

따라서 구하는 최소거리는
$d-$(원의 반지름)$=8-5=3$

12. 점 $(1, 2)$ 를 점 $(-2, -1)$ 로 옮기는 평행이동에 대하여 직선 $y = -2x+k$ 로 옮겨질 때, 상수 k 의 값을 구하여라.

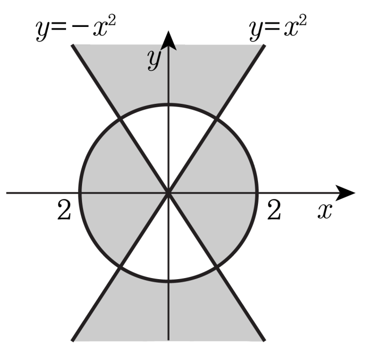
▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

점 $(1, 2)$ 를 점 $(-2, -1)$ 로 옮기는 평행이동을
$T : (x, y) \to (x+m, y+n)$ 이라고 하면,
$(1, 2) \xrightarrow{T} (-2, -1)$ 에서
$1 + m = -2, 2 + n = -1 \quad \therefore m = -3, n = -3$
$\therefore T : (x, y) \to (x-3, y-3)$
따라서, T 는 x 축의 방향으로 -3 만큼,
y 축의 방향으로 -3 만큼 옮기는 평행이동이다.
평행이동 $T : (x, y) \to (x-3, y-3)$ 에 의하여
직선 $y = -2x + k$ 는
직선 $y + 3 = -2(x + 3) + k$로 옮겨진다.
이 때, 이 직선이 원점을 지나므로
$x = 0,\ y = 0$ 을 대입하면
$3 = -6 + k \quad \therefore k = 9$

13. 다음 그림의 색칠한 부분이 나타내는 부등식을 고르면? (단, 경계선 포함)



① $xy(x^2+y^2-4) \le 0$

② $(x+y)(x^2+y^2-4) \le 0$

③ $(x+y)(x-y)(x^2+y^2-4) \ge 0$

④ $(x+y)(x-y)(x^2+y^2-4) < 0$

⑤ $(x+y)(x-y)(x^2+y^2-4) \le 0$

해설

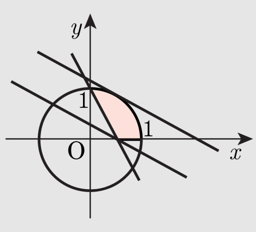
$x+y=0$, $x-y=0$, $x^2+y^2=4$가 주어진 영역의 경계를 나타내고, 주어진 영역속의 점 $(1,0)$을
$(x+y)(x-y)(x^2+y^2-4)$에 대입하면
0보다 작으므로 구하고자 하는 식은
$(x+y)(x-y)(x^2+y^2-4) \le 0$이다.

14. 세 개의 부등식 $x^2+y^2 \le 1, y \ge -2x+1, y \ge 0$ 을 동시에 만족시키는 x, y 에 대하여 $x+2y$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{2}$

해설



주어진 부등식을 동시에 만족시키는 영역은 다음 빗금 친 부분과 같다.
$x+2y=k$ 라 놓으면
$y=-\frac{1}{2}x+\frac{k}{2}$ 이므로
점 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ 을 지날 때 k 가 최소이고
직선 $x+2y-k=0$ 인,
원 $x^2+y^2=1$ 에 접할 때 k 는 최대이다.
최솟값은 $k=\frac{1}{2}+2\cdot 0=\frac{1}{2}$

15. 부등식의 영역 $x^2 + y^2 - 8y + 12 \le 0$ 위의 점 $(x,\ y)$ 에 대하여 $x^2 - 6x + y^2 + 9$ 의 최솟값과 최댓값을 차례대로 구하여라.

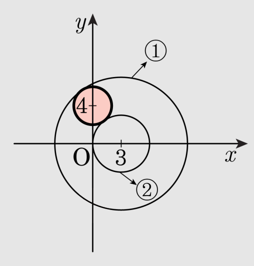
▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

▷ 정답 : 49

해설



$x^2 + y^2 - 8y + 12 \le 0 \Rightarrow x^2 + (y-4)^2 \le 4$

$x^2 - 6x + y^2 + 9 = k$ 라고 하면

그림처럼 ①일 때 k 가 최대

②일 때 k 가 최소가 된다.

중심사이의 거리가 5 이므로

① : $\sqrt{k} = 5 + 2 = 7$

② : $\sqrt{k} = 5 - 2 = 3$

$\therefore$ 최댓값 : 49 최솟값 : 9