

1. 다음 중 집합이 아닌 것을 모두 찾아라.

- ① 7 보다 작은 자연수의 모임
- ② 키가 큰 나무의 모임
- ③ 월드컵을 개최한 나라의 모임
- ④ 우리 반에서 농구를 잘 하는 학생의 모임
- ⑤ 15의 약수의 모임

해설

'키가 큰', '농구를 잘하는' 은 그 대상을 분명히 알 수 없으므로 집합이 아니다.

2. 집합 A 의 진부분집합의 개수가 15 개일 때, $n(A)$ 를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

진부분집합은 자기 자신을 제외한 모든 부분집합이므로,
(진부분집합의 수) = (부분집합의 수) - 1 이 된다.
따라서 집합 A 의 부분집합의 개수는 $15 + 1 = 16$ 개이며,
 $2^n = 16 \therefore n = 4$ 이다.

3. 두 집합 $\{5, 6, 8\}$, $\{8, a+2, 5\}$ 가 서로 같을 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 4

해설

두 집합이 서로 같으려면 $a+2=6$ 이어야 하므로 $a=4$

4. 다음 중 참인 명제는? (단, 문자는 모두 실수이다.)

- ① $a < b$ 이면 $a + c > b + c$
- ② $a < b$ 이면 $a - c > b - c$
- ③ $a < b$ 이고 $c > 0$ 이면 $ac > bc$
- ④ $a < b$ 이고 $c > 0$ 이면 $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
- ⑤ $ac < bc$ 이면 $a > b$

해설

실수의 대소 관계에는 다음과 같은 성질이 있다.

- i) 임의의 두 실수 a, b 에 대하여 $a > b, a = b, a < b$ 중에서 어느 하나만이 성립한다.
 - ii) $a > b, b > c$ 이면 $a > c$
 - iii) $a > b$ 이면 $a \pm c > b \pm c$
 - iv) $a > b, c > 0$ 이면 $ac > bc$
 - v) $a > b, c < 0$ 이면 $ac < bc$
- 따라서 참인 것은 ④이다.

5. 다음 빈 칸에 알맞은 말을 써 넣어라.

$A \cap B = A$ 인 것은 $A \subset B$ 이기 위한 조건이다.

▶ 답:

▷ 정답: 필요충분

해설

$A \cap B = A$ 인 것이 곧, $A \subset B$ 을 의미하므로 명제와 역 모두 참이 되는 필요충분조건이다.

6. 두 양수 a, b 에 대하여 $\left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b}\right)(a+b)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$a > 0, b > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{4}{b}\right)(a+b)$$

$$= 1 + \frac{b}{a} + \frac{4a}{b} + 4 \geq 5 \cdot 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{4a}{b}}$$

$$= 5 + 4 = 9$$

따라서 최솟값은 9이다.

(단, 등호는 $\frac{b}{a} = \frac{4a}{b}$, 즉 $b = 2a$ 일 때 성립)

7. $x = 4 - \sqrt{3}$ 일 때, $x^2 - 8x + 15$ 의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$x = 4 - \sqrt{3}$ 에서 $x - 4 = -\sqrt{3}$ 의 양변을 제곱하면, $(x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16 = 3$ 이므로
 $x^2 - 8x = -13$
 $\therefore x^2 - 8x + 15 = -13 + 15 = 2$

8. 유리수 x, y 가 $(x-2\sqrt{2})(4-\sqrt{2}y) = 8$ 을 만족할 때, x^2+y^2 의 값은?

- ① 20 ② 16 ③ 12 ④ 10 ⑤ 8

해설

$$\begin{aligned}(x-2\sqrt{2})(4-\sqrt{2}y) &= 8 \text{ 을 전개하여 정리하면} \\ (4x+4y-8) - (xy+8)\sqrt{2} &= 0 \\ \therefore 4x+4y-8 &= 0 \Rightarrow x+y=2 \\ \therefore xy+8 &= 0 \Rightarrow xy=-8 \\ x^2+y^2 &= (x+y)^2 - 2xy = 2^2 - 2 \times (-8) = 20\end{aligned}$$

9. 10의 약수의 집합을 A 라고 할 때, 다음 중 옳지 않은 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $1 \in A$ ② $3 \in A$ ③ $4 \notin A$ ④ $5 \in A$ ⑤ $6 \in A$

해설

집합 A 의 원소는 1, 2, 5, 10 이므로 3, 4, 6은 집합 A 의 원소가 아니다. 따라서

② $3 \notin A$

⑤ $6 \notin A$ 이다.

10. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 다음 중 $(A \cap B^c) \cup (B - A^c)$ 와 같은 집합은?

- ① A ② B ③ $A \cap B$ ④ $A \cup B$ ⑤ $A - B$

해설

$$\begin{aligned}(A \cap B^c) \cup (B - A^c) &= (A \cap B^c) \cup (B \cap A) \\ &= A \cap (B^c \cup B) \\ &= A \cap U = A\end{aligned}$$

11. 전체집합 $U = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 의 두 부분집합 $A = \{3, 5, 9\}$, $B = \{3, 7\}$ 에 대하여 $B \cap A^c$ 은?

- ① $\{1\}$ ② $\{5\}$ ③ $\{7\}$ ④ $\{5, 7\}$ ⑤ $\{5, 9\}$

해설

$B \cap A^c = B - A = \{7\}$ 이다.

12. a, b 가 양수일 때, $\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} + 4b\right)$ 의 최솟값을 구하면?

- ① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} + 4b\right) = 1 + 4ab + \frac{1}{ab} + 4$$

a, b 가 양수이므로, $ab > 0$

$$4ab + \frac{1}{ab} \geq 2 \cdot \sqrt{4ab \cdot \frac{1}{ab}} = 4$$

$$\therefore \left(a + \frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a} + 4b\right) = 4ab + \frac{1}{ab} + 5 \geq 5 + 4 = 9$$

13. 다음 보기의 대응 중에서 함수인 것을 모두 고른 것은 무엇인가?

보기

- ㉠ 원의 반지름의 길이와 그 넓이의 대응
- ㉡ 이차방정식과 그 방정식의 실근의 대응
- ㉢ 선분과 그 길이의 대응
- ㉣ 함수와 그 함수의 정의역의 대응
- ㉤ 실수와 그 실수를 포함하는 집합의 대응

- ① ㉠, ㉡, ㉢
- ② ㉠, ㉡, ㉤
- ③ ㉠, ㉢, ㉣
- ④ ㉡, ㉢
- ⑤ ㉣, ㉤

해설

- ㉠ 모든 원의 반지름의 길이 r 는 오직 하나의 넓이 πr^2 에 대응되므로 함수가 될 수 있다.
- ㉡ 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 에서 $b^2 - 4ac < 0$ 이면 대응을 갖지 못하고(허근), $b^2 - 4ac > 0$ 이면 두 개의 대응을 가지므로(서로 다른 두 실근) 함수가 될 수 없다.
- ㉢ 모든 선분은 오직 하나의 길이에 대응되므로 함수가 될 수 있다.
- ㉣ 모든 함수는 반드시 정의역을 갖고 그 정의역은 유일하므로 함수가 될 수 있다.
- ㉤ 특정한 실수 a 를 포함하는 집합은 $\{a\}$, $\{a, b\}$, $\{a, b, c\}$, ... 등 무수히 많다. 즉, 실수 a 에 a 를 포함하는 무수히 많은 집합들이 대응되므로 함수가 될 수 없다. 따라서 함수인 것은 ㉠, ㉢, ㉣이다.

14. $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x < 0) \\ -2x & (x \geq 0) \end{cases}$ 일 때, $(f^{-1} \circ f^{-1})(4)$ 의 값은 얼마인가?

- ① -1 ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 4

해설

$(f^{-1} \circ f^{-1})(4) = (f \circ f)^{-1}(4) = a$ 라 놓으면,
 $(f \circ f)(a) = f(f(a)) = 4$
 $f(-2) = (-2)^2 = 4$ 이므로 $f(a) = -2$
또, $f(1) = -2 \cdot 1 = -2$
 $\therefore a = 1$

15. $x = \sqrt{2} + 1, y = \sqrt{2} - 1$ 일 때,

$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ 의 값은?

- ① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{3}$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \\ &= \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{x - y} \\ &= \frac{x + y - 2\sqrt{xy} + x + y + 2\sqrt{xy}}{x - y} = \frac{2(x + y)}{x - y} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x + y = \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2} \\ x - y = \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 1 = 2 \end{cases}$$

$$\therefore \frac{2(x + y)}{x - y} = \frac{2 \times 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

16. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_5 = 4a_3$, $a_2 + a_4 = 4$ 가 성립할 때, a_6 의 값은?

- ① 5 ② 8 ③ 11 ④ 13 ⑤ 16

해설

a_2, a_3, a_4 는 이 순서로 등차수열을 이루므로 $a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2} = 2$

$\therefore a_5 = 4a_3 = 8$

이때, 공차를 d 라 하면 $a_5 = a_3 + 2d$ 이므로

$8 = 2 + 2d \quad \therefore d = 3$

$\therefore a_6 = a_5 + d = 8 + 3 = 11$

17. $\sum_{k=1}^{10} a_k = 5$, $\sum_{k=1}^{10} a_k^2 = 20$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} (a_k + 1)^3 - \sum_{k=1}^{10} (a_k - 1)^3$ 의 값은?

- ① 110 ② 120 ③ 122 ④ 132 ⑤ 140

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{10} (a_k + 1)^3 - \sum_{k=1}^{10} (a_k - 1)^3 \\ &= \sum_{k=1}^{10} (a_k^3 + 3a_k^2 + 3a_k + 1) - \sum_{k=1}^{10} (a_k^3 - 3a_k^2 + 3a_k - 1) \\ &= \sum_{k=1}^{10} (6a_k^2 + 2) = 6 \sum_{k=1}^{10} a_k^2 + \sum_{k=1}^{10} 2 \\ &= 6 \times 20 + 2 \times 10 = 140 \end{aligned}$$

18. $\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \div \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}}$ 를 $4^{\frac{m}{n}}$ 으로 나타낼때, $m+n$ 의 값은? (단, m, n 은 서로소인 자연수)

- ① 21 ② 22 ③ 39 ④ 41 ⑤ 49

해설

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \div \sqrt{2} &= \frac{2}{2^{\frac{1}{3}}} \div 2^{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \div 2^{\frac{1}{3}} \div 2^{\frac{1}{2}} = 2^{1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} \\ &= 2^{\frac{1}{6}} \times \sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}}\end{aligned}$$

또한, $2\sqrt[3]{4} = 2^{1+\frac{2}{3}} = 2^{\frac{5}{3}}$ 에서

$$\sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}} = (2^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{9}} \text{이므로}$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt[3]{2}} \div \sqrt{2} \times \sqrt[3]{2\sqrt[3]{4}} \\ &= 2^{\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{5}{9}} = 2^{\frac{3}{18} + \frac{10}{18}} = 2^{\frac{13}{18}} = 4^{\frac{13}{36}}\end{aligned}$$

$$\therefore m = 36, n = 13$$

$$\therefore m + n = 49$$

19. $\sqrt[3]{\sqrt{2}\sqrt[4]{8}}$ 을 $\sqrt{2^k}$ 의 꼴로 나타낼 때, 상수 k 의 값은?

- ① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{11}{12}$ ④ $\frac{7}{6}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

해설

$\sqrt[a^m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ 을 이용하여 주어진 수를 변형하고 지수법칙으로 계산한다.

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}\sqrt[4]{8}} = (2^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}$$

$$= (2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}}$$

$$= 2^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{12}}$$

$$2^{\frac{5}{12}} = (2^{\frac{1}{2}})^k \text{이므로 } \frac{5}{12} = \frac{1}{2}k$$

$$\therefore k = \frac{5}{6}$$

20. $a = 5 \times 729^x$ 일 때, 27^x 을 a 에 관한 식으로 나타내면?

① $\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{4}}$

② $\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$

③ $\left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$

④ $\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

⑤ $\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

해설

$$a = 5 \times 729^x = 5 \times (3^6)^x = 5 \times 3^{6x}$$

$$\frac{a}{5} = 3^{6x} = (3^{3x})^2$$

$$\therefore 3^{3x} = \left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\therefore 27^x = 3^{3x} = \left(\frac{a}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$$

21. 두 집합 $A = \{6, a, 3, b, 2\}$, $B = \{5, c, 3, d, 7\}$ 이 서로 같을 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 20

해설

$A = B$ 이므로
 $\{6, a, 3, b, 2\} = \{5, c, 3, d, 7\}$
이 중 3은 공통이므로 제외하면
 $a = 5, b = 7$ 또는 $a = 7, b = 5$
따라서 $a + b = 12$
 $c = 2, d = 6$ 또는 $c = 6, d = 2$
따라서 $c + d = 8$
 $\therefore a + b + c + d = 20$

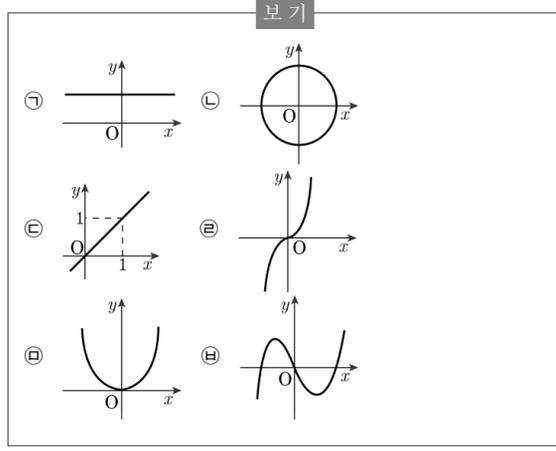
22. 집합 $X = \{1, 2\}$ 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 + x + a$, $g(x) = x^2 + bx + 1$ 에 대하여 $f = g$ 일 때, $a + b$ 의 값은?

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

정의역 $X = \{1, 2\}$ 이고 $f = g$ 이므로
 $f(1) = g(1)$, $f(2) = g(2)$ 가 성립한다.
 $f(1) = g(1)$ 에서 $2 + 1 + a = 1 + b + 1$
 $\therefore a - b = -1 \quad \dots \textcircled{1}$
 $f(2) = g(2)$ 에서 $8 + 2 + a = 4 + 2b + 1$
 $\therefore a - 2b = -5 \quad \dots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 을 연립하여 풀면 $a = 3$, $b = 4$
 $\therefore a + b = 7$

23. 다음 중 보기의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것은?



- ① 상수함수는 ㉠ 과 ㉤ 이다.
- ② 일대일 대응은 ㉢ 과 ㉥ 이다.
- ③ 항등함수는 ㉤ 이다.
- ④ 함수의 그래프가 아닌 것은 ㉡ 뿐이다.
- ⑤ ㉠ 과 ㉢ 의 치역은 같다.

해설

함수의 그래프는 y 축에 평행한 직선을 그을 때, 교점이 오직 하나인 그래프이므로 ㉠, ㉢, ㉤, ㉥ 이다.
 일대일 대응인 그래프는 함수의 그래프 중 x 축에 평행한 직선을 그을 때 교점이 하나인 그래프이므로 ㉢, ㉥ 이다.
 상수함수는 X 의 모든 원소가 Y 의 한 원소에만 대응되는 함수이므로 ㉠ 이다.
 항등함수는 X 의 모든 원소가 자기 자신에 대응되는 함수이므로 ㉤ 이다. 따라서 옳은 것은 ④ 이다.

24. $x \neq 1$ 인 모든 실수에 대하여 $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ 로 정의된 함수 f 에 대하여
역함수 $f^{-1}(x)$ 가 $f^{-1}(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x) = y = \frac{2x+1}{x-1}$ 의 역함수는

$x = \frac{2y+1}{y-1}$ 에서

$x(y-1) = 2y+1, xy-x = 2y+1, xy-2y = x+1$

$(x-2)y = x+1$

$\therefore y = \frac{x+1}{x-2} = f^{-1}(x)$

$= \frac{ax+b}{x+c}$

즉, $a = 1, b = 1, c = -2$

$\therefore a+b+c = 0$

25. 함수 $f(x) = \sqrt{7-3x}$ 의 역함수를 $f^{-1}(x)$ 라 할 때, $(f^{-1} \circ f^{-1})(1)$ 의 값은?

- ㉠ 1 ㉡ 2 ㉢ 3 ㉣ 4 ㉤ 5

해설

$$f^{-1}(1) = a \text{ 라 하면 } f(a) = \sqrt{7-3a} = 1$$

$$7-3a = 1, a = 2$$

$$\therefore f^{-1}(1) = 2$$

$$\text{이때, } (f^{-1} \circ f^{-1})(1) = f^{-1}(f^{-1}(1)) \\ = f^{-1}(2) \text{ 이므로}$$

$$f^{-1}(2) = b \text{ 라 하면 } f(b) = \sqrt{7-3b} = 2$$

$$7-3b = 4, b = 1$$

$$\therefore f^{-1}(2) = 1$$

$$\therefore (f^{-1} \circ f^{-1})(1) = f^{-1}(2) = 1$$

26. 두 함수 $f(x) = 2x + 5$, $g(x) = -3x + 2$ 에 대하여 $(g^{-1} \circ f)(a) = 2$ 가 성립할 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① $a = -\frac{3}{2}$

② $a = -\frac{5}{2}$

③ $a = -\frac{7}{2}$

④ $a = -\frac{9}{2}$

⑤ $a = -\frac{11}{2}$

해설

$(g^{-1} \circ f)(a) = g^{-1}(f(a)) = 2$ 에서

$f(a) = g(2)$ 이다.

주어진 함수식에 의하여

$$\therefore 2a + 5 = -3 \cdot 2 + 2$$

$$\therefore a = -\frac{9}{2}$$

27. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ 일 때, $\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f(2)} + \dots + \frac{1}{f(99)}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$ 이므로

$$\frac{1}{f(x)} = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

$$\begin{aligned} \therefore (\text{준 식}) &= (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \\ &\quad (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + \dots + (\sqrt{100} - \sqrt{99}) \\ &= \sqrt{100} - 1 = 10 - 1 = 9 \end{aligned}$$

28. $a = \sqrt{2 + \sqrt{3}}, b = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ 일 때, $a^3 + b^3$ 의 값을 구하여라. (단, p, q 는 정수)

▶ 답:

▷ 정답: $3\sqrt{6}$

해설

$$a = \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$$

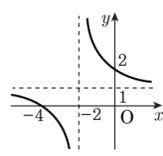
$$b = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$$

$$a + b = \sqrt{6}, ab = 1$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 6\sqrt{6} - 3\sqrt{6} = 3\sqrt{6}$$

29. 함수 $y = \frac{c-x}{ax+b}$ 의 그래프가 그림과 같을 때,
 $a+b+c$ 의 값은?

- ① -1 ② -2 ③ -4
 ④ -7 ⑤ 0



해설

점근선이 $x = -2, y = 1$ 이므로

$$y = \frac{k}{x+2} + 1 \dots \dots \textcircled{1}$$

①이 (0, 2) 를 지나므로 대입하면 $k = 2$

$$y = \frac{2}{x+2} + 1 = \frac{-x-4}{-x-2}$$

$$\therefore a = -1, b = -2, c = -4$$

30. 세 수 $\log_2 x$, $\log_2 y$, $\log_2 z$ 가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, x , y , z 의 관계식은?(단, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$)

- ① $y = \frac{x+z}{2}$ ② $y = x+z$ ③ $y = 2(x+z)$
④ $y = \sqrt{xz}$ ⑤ $y = xz$

해설

세 수 $\log_2 x$, $\log_2 y$, $\log_2 z$ 가 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$$\log_2 y = \frac{\log_2 x + \log_2 z}{2} = \frac{\log_2 xz}{2}$$

$$2 \log_2 y = \log_2 xz, \quad \log_2 y^2 = \log_2 xz$$

$$\therefore y^2 = xz$$

$$\therefore y = \sqrt{xz} (x > 0, y > 0, z > 0)$$

31. $a_1 = 1$, $a_{10} = 37$ 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $(a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{100}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99})$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 200

해설

등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라 하면

$$a_{10} - a_1 = a_1 + 9d - a_1 = 9d = 36 \quad \therefore d = 4$$

이때, $a_{n+1} - a_n = d = 4$ 이므로

$$\begin{aligned} & (a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{100}) - (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{99}) \\ &= (a_2 - a_1) + (a_4 - a_3) + \cdots + (a_{100} - a_{99}) \\ &= 4 + 4 + \cdots + 4 = 4 \times 50 = 200 \end{aligned}$$

32. 공비가 $-\sqrt{6}$ 인 등비수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = -20$ 일 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8$ 의 값은?

① -740 ② -720 ③ -700 ④ -680 ⑤ -660

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 공비가 $-\sqrt{6}$ 인 등비수열이므로 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하면

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a + ar + ar^2 + ar^3 = -20$$

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = ar^4 + ar^5 + ar^6 + ar^7$$

$$= r^4(a + ar + ar^2 + ar^3)$$

$$= 36 \cdot (-20) = 720$$

$$\text{따라서 } a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_8 = -20 + (-720) = -740$$

33. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 = 2$, $a_{10} = 25$ 이다. 수열 $\{a_n\}$ 의 제차수열을 $\{b_n\}$ 이라 할 때, $b_1 + b_2 + \dots + b_9$ 의 값은?

- ① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

해설

$$a_{10} - a_1 = b_1 + b_2 + \dots + b_9$$
$$\therefore b_1 + b_2 + \dots + b_9 = 25 - 2 = 23$$

34. 수열 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \dots$ 에서 $\frac{5}{64}$ 는 제 몇 항인가?

- ① 제32항 ② 제33항 ③ 제34항
④ 제35항 ⑤ 제36항

해설

분모가 같은 것끼리 같은 군으로 묶으면

$$\left(\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}\right), \left(\frac{1}{16}, \dots\right), \dots$$

각 군의 첫째항은 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ 이므로 $\frac{1}{64}$ 는 제 6군의 첫째항이

고, 각 군의 분자는 1, 3, 5, 7, ... 이므로 $\frac{5}{64}$ 는 제 6군의 3번째 항이다.

각 군의 항수는 1, 2, 4, 8, ... 이므로 구하는 항의 수는

$$(1+2+4+8+16)+3=34$$

35. 다음 그림과 같이 홀수가 배열되어 있을 때, 제10행의 왼쪽에서 다섯 번째의 수를 구하여라.

제1행	1
제2행	3 5 7
제3행	9 11 13 15 17
제4행	19 21 23 25 27 29 31
⋮	⋮

▶ 답 :

▷ 정답 : 171

해설

주어진 수열을 군으로 묶으면 다음과 같다.
 (1) 제1군, (3, 5, 7) 제2군, (9, 11, 13, 15, 17) 제3군, ... 각 군의 첫째항으로 이루어진 수열을 $\{a_n\}$, 그 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라 하면
 $\{a_n\} : 1, 3, 9, 19, \dots$
 $\{b_n\} : 2, 6, 10, \dots$
 $\therefore b_n = 2 + (n-1) \cdot 4 = 4n - 2$
 $\therefore a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k-2) = 1 + 4 \cdot \frac{n(n-1)}{2} - 2(n-1) = 2n^2 - 4n + 3$
 $\therefore a_{10} = 2 \cdot 10^2 - 4 \cdot 10 + 3 = 163$
 이때, 각 행은 공차가 2인 등차수열이므로 제10행의 왼쪽에서 다섯 번째에 있는 수는
 $163 + (5-1) \times 2 = 171$

36. 다음은 임의의 자연수 n 에 대하여 $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$ 이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$ 일 때, (좌변) $= \frac{1}{3} =$ (우변) 이므로 성립한다.
(ii) $n=k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
 $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$
위의 식의 양변에 ㉠을 더하면
 $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} +$ ㉠ $=$ ㉡
즉, $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식이 성립한다.
따라서, (i), (ii)에 의하여 주어진 등식은 모든 자연수 n 에 대하여 성립한다.

위의 증명에서 ㉠, ㉡에 알맞은 것을 순서대로 구하면?

- ① $\frac{1}{2k(2k+2)}, \frac{2k+1}{2k+3}$ ② $\frac{1}{2k(2k+2)}, \frac{2k+2}{2k+3}$
③ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}, \frac{k+1}{2k+3}$ ④ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}, \frac{k+2}{2k+3}$
⑤ $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}, \frac{k+3}{2k+3}$

해설

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$$

의 양변에 $\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$ 을 더하면

$$\begin{aligned} \text{(우변)} &= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{(k+1)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3} \end{aligned}$$

37. 서로소인 두 자연수 a, b 에 대하여 $\frac{\sqrt{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{3} = 3^{\frac{a}{b}}$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$$\frac{\sqrt{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{3} = \frac{3^{\frac{1}{4}}}{3^{\frac{1}{2}}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{12}}$$

따라서 $a + b = 13$ 이다.

38. $2^{2x} = 3$ 일 때, $\frac{2^x + 2^{-x}}{2^{3x} + 2^{-3x}}$ 의 값은?

- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{3}{7}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

해설

주어진 식의 분모와 분자에 2^{3x} 를 곱하면

$$\begin{aligned}\frac{2^x + 2^{-x}}{2^{3x} + 2^{-3x}} &= \frac{(2^x + 2^{-x}) \times 2^{3x}}{(2^{3x} + 2^{-3x}) \times 2^{3x}} \\ &= \frac{2^{4x} + 2^{2x}}{2^{6x} + 1} = \frac{(2^{2x})^2 + 2^{2x}}{(2^{2x})^3 + 1} \\ &= \frac{3^2 + 3}{3^3 + 1} = \frac{3}{7}\end{aligned}$$

39. $\log \frac{x}{4.71} = 1.9812$ 를 만족하는 양수 x 의 값을 다음 상용로그표를 이용하여 구하여라.

수	0	1	1	3	...
∴	∴	∴	∴	∴	∴
4.5	.6532	.6542	.6551	.6561	...
4.6	.6628	.6737	.6647	.6656	...
4.7	.6721	.6730	.6739	.6749	...
∴	∴	∴	∴	∴	∴

▶ 답:

▷ 정답: 451

해설

$\log x$ 의 가수를 구하고, 가수가 같은 로그의 진수를 상용로그표에서 찾는다.

$$\log \frac{x}{4.71} = \log x - \log 4.71 = \log x - 0.6730 = 1.9812 \text{ 이므로}$$

$$\log x = 2.6542 = 2 + 0.6542$$

로그표에서 $\log 4.51 = 0.6542$ 이므로 $x = 451$

40. 반지름의 길이가 r 인 구의 겹넓이 S 와 부피 V 는 다음과 같다.

$$S = 4\pi r^2, V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

다음 중 r 의 값에 관계없이 항상 일정한 값을 갖는 것은?

- ① $\log S - \frac{1}{3}\log V$ ② $\log S - \frac{2}{3}\log V$ ③ $\log S - \log V$
④ $\log S - \frac{4}{3}\log V$ ⑤ $\log S - \frac{5}{3}\log V$

해설

$$\log S = \log 4\pi + 2\log r \cdots \text{㉠}$$

$$\log V = \log \frac{4}{3}\pi + 3\log r \cdots \text{㉡}$$

㉠ $\times 3$ - ㉡ $\times 2$ 에서

$$3\log S - 2\log V$$

$$= 3\log 4\pi - 2\log \frac{4}{3}\pi$$

$$= 3(\log S - \frac{2}{3}\log V) \text{(일정)}$$