

1. $a_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_5 의 값은?

① 4

② 8

③ 16

④ 32

⑤ 48

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열이므로 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
 $\therefore a_5 = 3 \cdot 2^4 = 48$

2. $a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n + 3 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{10} 의 값은?

① 29

② 31

③ 33

④ 35

⑤ 37

해설

$a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n + 3$ 이므로
 a_n 은 초항이 4, 공차가 3 인 등차수열
 $\therefore a_n = 4 + (n - 1) \cdot 3$
 $= 4 + 3n - 3$
 $= 3n + 1$
 $\therefore a_{10} = 31$

3. $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n - 3 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값은?

① -5 ② -10 ③ -15 ④ -20 ⑤ -25

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 2, 공차가 -3 인 등차수열이므로

$$a_n = 2 + (n - 1) \cdot (-3) = -3n + 5$$

$$\therefore a_{10} = -3 \cdot 10 + 5 = -25$$

4. $a_1 = 1$, $a_{n+1} - a_n = 3 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 $\sum_{k=1}^{20} a_k$ 의 값은?

① 115 ② 270 ③ 326 ④ 445 ⑤ 590

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열이므로

$$\sum_{k=1}^{20} a_k = \frac{20(2 \cdot 1 + 19 \cdot 3)}{2} = 590$$

5. $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = 2a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 구하면?

- ① 2^{n-1} ② 2^n ③ 2^{n-2} ④ 2^{n+1} ⑤ $\frac{1}{2}n$

해설

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = 2a_n$$

a_n 은 초항이 $\frac{1}{2}$, 공비가 2 인 등비수열

$$\begin{aligned} \therefore a_n &= \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} \\ &= 2^{n-2} \end{aligned}$$

6. $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ 이고, $a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$ 을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\log_3 a_{10}$ 의 값은?

① $9 \log_3 2$

② $10 \log_3 2$

③ $11 \log_3 2$

④ 9

⑤ 10

해설

$a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 등비수열이다.

$a_1 = 1$, $r = \frac{a_2}{a_1} = 3$ 이므로

$$a_{10} = 1 \cdot 3^{10-1} = 3^9$$

$$\therefore \log_3 a_{10} = \log_3 3^9 = 9 \log_3 3 = 9$$

7. $a_1 = 2$, $a_{n+1} = a_n^2 - n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_4 의 값은?

① 26

② 31

③ 36

④ 46

⑤ 51

해설

$$a_1 = 2, a_{n+1} = a_n^2 - n \text{ 이므로 } a_2 = a_1^2 - 1 = 3$$

$$a_3 = a_2^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$$

$$a_4 = a_3^2 - 1 = 8^2 - 1 = 63$$

8. $a_1 = 3, a_{n+1} = a_n + 2 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 제 10항은?

- ① 13 ② 15 ③ 17 ④ 19 ⑤ 21

해설

$$a_{n+1} - a_n = 2 \text{의 양변에}$$
$$n = 1, 2, 3, \dots, (n-1) \text{을 대입하여 변끼리}$$
$$\text{더하면}$$
$$a_2 - a_1 = 2$$
$$a_3 - a_2 = 2$$
$$a_4 - a_3 = 2$$
$$\vdots$$
$$\hline +) a_n - a_{n-1} = 2$$
$$a_n - a_1 = 2(n-1)$$
$$\therefore a_n = a_1 + 2(n-1) = 2n + 1$$
$$\therefore a_{10} = 2 \cdot 10 + 1 = 21$$

해설

첫째항이 3, 공차가 2인 등차
수열이므로 $a_n = 2n + 1$
 $\therefore a_{10} = 2 \times 10 + 1 = 21$

9. $a_1 = 2, a_2 = 3$ 이고,
 $a_{2n+2} = a_{2n} + 1, a_{2n+1} = a_{2n-1} + 3 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된
수열 $\{a_n\}$ 에서 $\sum_{k=1}^{30} a_k$ 의 값은?

① 490 ② 495 ③ 500 ④ 505 ⑤ 510

해설

$a_{2n+2} = a_{2n} + 1, a_{2n+1} = a_{2n-1} + 3 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 에서 수열 $\{a_n\}$ 의 홀수 번째 항들은 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열이고, 짝수 번째 항들은 첫째항이 3, 공차가 1인 등차수열이다.

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{30} a_k &= (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{29}) \\ &+ (a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{30}) \\ &= \frac{15(2 \cdot 2 + 14 \cdot 3)}{2} + \frac{15(2 \cdot 3 + 14 \cdot 1)}{2} \\ &= 495 \end{aligned}$$

10. $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 1$, $a_{n+9} - a_{n+2} = 35$ 가 성립할 때, a_{100} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 496

해설

$2a_{n+2} = a_n + a_{n+2}$ 를 만족하는 수열 $\{a_n\}$ 은 등차수열이므로
공차를 d 라 하면

$$a_{n+9} = a_{n+2} + 7d \text{에서 } 7d = 35$$

$$\therefore d = 5$$

$$\therefore a_{100} = 1 + 99 \cdot 5 = 496$$

11. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $b_n = \frac{1}{a_n}$ 이라 할 때, $a_{15}b_{20}$ 의 값은?

① 3 ② 9 ③ 27 ④ 81 ⑤ 243

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 $\frac{1}{3}$ 인 등비수열이므로

$$a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3^{n-1}} \quad \therefore b_n = 3^{n-1}$$

$$\therefore a_{15}b_{20} = \frac{1}{3^{14}} \cdot 3^{19} = 3^5 = 243$$

12. $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_9 의 값은?

① 32

② 64

③ 128

④ 256

⑤ 512

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 1, 공비가 2인 등비수열이므로

$$a_n = 1 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

$$\therefore a_9 = 2^{9-1} = 2^8 = 256$$

13. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음과 같이 정의될 때, a_{10} 의 값은?

$a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n(n = 1, 2, 3, \dots)$

- ① $2 \cdot 3^8$

② $2 \cdot 3^9$

③ $2 \cdot 3^{10}$
- ④ $2 \cdot 3^{11}$

⑤ $2 \cdot 3^{12}$

해설

$a_{n+1} = 3a_n$ 에서 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3$ 이므로 양변에 $n = 1, 2, 3, \dots, 9$ 를

대입하여 곱하면

$$\frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \frac{a_4}{a_3} \times \frac{a_5}{a_4} \times \frac{a_6}{a_5} \times \frac{a_7}{a_6} \times \frac{a_8}{a_7} \times \frac{a_9}{a_8} \times \frac{a_{10}}{a_9} = 3^9$$

$$\frac{a_{10}}{a_1} = 3^9$$

$$\therefore a_{10} = a_1 \cdot 3^9 = 2 \cdot 3^9$$

14. $a_1 = 5, a_{n+1} = a_n + n^2 (n = 1, 2, 3, \dots)$ 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 290

해설

$a_{n+1} = a_n + n^2$ 의 n 에 $n = 1, 2, 3, \dots, 9$ 를 차례로 대입하여
변끼리 더하면

$$\begin{array}{r} a_1 = a_1 + 1^2 \\ a_2 = a_1 + 1^2 + 2^2 \\ a_3 = a_1 + 1^2 + 2^2 + 3^2 \\ \vdots \\ +) a_{10} = a_1 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 9^2 \\ \hline a_{10} = a_1 + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 9^2) \\ = 5 + \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{6} \\ = 290 \end{array}$$

15. $a_1 = -1$, $a_{n+1} = a_n + n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_{10} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 44

해설

$$a_2 = a_1 + 1$$

$$a_3 = a_2 + 2$$

$$\vdots$$
$$+ \left| \begin{array}{l} a_n = a_{n-1} + (n-1) \\ a_n = a_1 + 1 + \dots + (n-1) \\ = -1 + \frac{(n-1) \cdot n}{2} \end{array} \right.$$

$$\therefore a_{10} = -1 + \frac{9 \cdot 10}{2}$$

$$= -1 + 45 = 44$$

16. $a_1 = -10$, $a_{n+1} = a_n + n^2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{11} 의 값은?

① 210 ② 275 ③ 310 ④ 375 ⑤ 425

해설

$a_{n+1} - a_n = f(n)$ 꼴이면 $f(n)$ 은 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열임을 이용한다.

$a_{n+1} = a_n + n^2$, $a_{n+1} - a_n = n^2$ 이므로

수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라 하면 $b_n = n^2$

$$\begin{aligned}\therefore a_{11} &= -10 + \sum_{k=1}^{10} k^2 \\ &= -10 + \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 375\end{aligned}$$

17. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_9 의 값은?

① 511 ② 512 ③ 513 ④ 1023 ⑤ 1025

해설

수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열을 $\{b_n\}$ 이라 하면

$$a_{n+1} - a_n = 2^n \text{ 이므로 } b_n = 2^n$$

따라서 $n \geq 2$ 일 때,

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 1 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} \text{ 이때, } a_1 = 1 \text{ 은 } \textcircled{1} \text{을 만}$$
$$= 2^n - 1 \dots\dots \textcircled{1}$$

즉시킴으로 구하는 일반항은 $a_n = 2^n - 1$

$$\therefore a_9 = 2^9 - 1 = 511$$

18. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (n+1)a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)으로 수열 $\{a_n\}$ 이 정의될 때, a_n 을 10으로 나눈 나머지가 0이 되는 최소의 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$a_{n+1} = (n+1)a_n$ 의 n 에 $n = 1, 2, 3, \dots$ 을 차례로 대입하면

$$a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$a_3 = 3 \cdot a_2 = 3 \cdot 2 = 6$$

$$a_4 = 4 \cdot a_3 = 4 \cdot 6 = 24$$

$$a_5 = 5 \cdot a_4 = 5 \cdot 24 = 120$$

19. 수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_{10} = 2^{50}$, $a_{n+1} = 2^n a_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 일 때, 이 수열의 첫째항은?

① 32 ② 64 ③ 128 ④ 256 ⑤ 512

해설

$a_{n+1} = 2^n a_n$ 에서 n 대신에 $1, 2, 3, \dots, n-1$ 을 차례로 대입하면

$$a_2 = 2^1 a_1$$

$$a_3 = 2^2 a_2$$

$$a_4 = 2^3 a_3$$

$\vdots$

$\vdots$

$$a_n = 2^{n-1} a_{n-1}$$

이 등식들을 변끼리 곱하면

$$a_n = 2^1 \cdot 2^2 \cdots 2^3 \cdots 2^{n-1} \cdot a_1$$

$$\therefore a_n = 2^{1+2+3+\cdots+(n-1)} \cdot a_1 = a_1 \cdot 2^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

$$a_{10} = 2^{50} \text{ 이므로 } 2^{50} = a_1 \cdot 2^{45}$$

$$a_1 = 2^5 = 32$$

20. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ 이고, $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 을 만족할 때, 일반항 a_n 을 구하면?

- ① 2^{n-1}
- ② 3^{n-1}
- ③ 4^{n-1}
- ④ 5^{n-1}
- ⑤ 6^{n-1}

해설

$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$ 에서
 $a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n)$
 $a_{n+1} - a_n = b_n$ 으로 놓으면 $b_{n+1} = 3b_n$
이때, 수열 $\{b_n\}$ 은 공비가 3인 등비수열이고,
 $b_1 = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$ 이므로
 $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$
수열 $\{b_n\}$ 은 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열이므로
 $a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2 \cdot 3^{k-1}$
 $= 1 + \frac{2(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} = 3^{n-1}$

21. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 2$, $a_2 = 4$ 이고, $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)을 만족할 때, a_{100} 의 값을 구하면?

① 2^{10}

② 2^{20}

③ 2^{40}

④ 2^{80}

⑤ 2^{100}

해설

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0 \text{에서}$$

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$$

$$a_{n+1} - a_n = b_n \text{으로 놓으면 } b_{n+1} = 2b_n$$

이때, 수열 $\{b_n\}$ 은 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열이므로

$$a_n = 2 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 2 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1}$$

$$a_n = 2^n$$

$$\therefore a_{100} = 2^{100}$$

22. 다음과 같이 정의된 수열의 일반항 a_n 에 대하여 $a_{50} = p - 2^q$ 이라 할 때 $p + q$ 의 값을 구하여라.

보기

- $a_1 = 1, a_2 = 2$
- $2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$ (단, $n = 1, 2, 3, \dots$)

▶ 답 :

▷ 정답 : -45

해설

조건식을 변형하면 $a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)$ 이므로

$a_{n+1} - a_n = b_n$ 이라 하면 $b_n = \frac{1}{2}b_{n-1}$

$b_1 = a_2 - a_1$ 이므로 $b_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}} =$

$3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

$a_{50} = 3 - 2^{-48}$

$\therefore p = 3, q = -48$ 이므로 $p + q = -45$

23. $a_1 = 4, a_2 = 6, a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0 \ (n \geq 1)$ 으로 정의되는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} a_n$ 의 값은?

- ① $2^{10} + 6$
- ② $2^{10} + 0$
- ③ $2^{10} + 18$
- ④ $2^{11} + 9$
- ⑤ $2^{11} + 18$

해설

$a_{n+2} - a_{n+1} = P(a_{n+1} - a_n)$ 꼴로 변형하면
 $a_{n+2} - (1 + P)a_{n+1} + Pa_n = 0 \quad \therefore P = 2$
 $\therefore a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$
이때, $a_{n+1} - a_n = b_n$ 이라 하면 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열 $\{b_n\}$ 은
첫째항이 $b_1 = a_2 - a_1 = 6 - 4 = 2$ 이고 공비가 2 인 등비수열이
다.
 $\therefore b_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$
 $\therefore a_n = 4 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 4 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} = 2^n + 2$
 $\therefore \sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10} (2^n + 2) = \frac{2(2^{10} - 1)}{2 - 1} + 2 \cdot 10$
 $= 2^{11} - 2 + 20 = 2^{11} + 18$

24. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 로 정의될 때,

$a^{2014}a^{2015}a^{2016}$ 의 값은?

- ① -1
- ② 0
- ③ 1
- ④ 2
- ⑤ 4

해설

$a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n}$ 에 $n = 1, 2, 3, \dots$ 을 차례로 대입하면

$a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = -1, a_4 = 2, a_5 = \frac{1}{2}, a_6 = -1, \dots$

따라서, 수열 $\{a_n\}$ 은 $2, \frac{1}{2}, -1$ 이 반복되는 수열이고

$a^{2014}, a^{2015}, a^{2016}$ 은 연속한 세 항의 곱이므로

$2 \times \frac{1}{2} \times (-1) = -1$

25. $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항은?

- ① $\frac{1}{n}$ ② $\frac{1}{n+1}$ ③ $\frac{1}{n+2}$ ④ $\frac{2}{n}$ ⑤ $\frac{2}{n+1}$

해설

$a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$ 의 양변을 역수로 취하면

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + 1, \quad \therefore \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 1$$

따라서 수열 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 은 첫째항이 $\frac{1}{a_1} = 1$ 이고, 공차가 1인 등차 수열이므로

$$\frac{1}{a_n} = 1 + (n-1) \cdot 1 = n \quad \therefore a_n = \frac{1}{n}$$

26. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 다음이 성립할 때, a_{101} 의 값은? (단, $a_n \neq 0$)

$$a_2 = 5, a_n \cdot a_{n+1} = a_n(a_n - 4) (n \geq 1)$$

- ① -391 ② -399 ③ -40 ④ -401 ⑤ -402

해설

$$a_n a_{n+1} = a_n(a_n - 4) \text{에서}$$

$$a_n \neq 0 \text{이므로 } a_{n+1} = a_n - 4$$

$$\therefore a_{n+1} - a_n = -4$$

$$a_2 = 5 \text{에서 } 5 = a_1 - 4 \quad \therefore a_1 = 9$$

따라서, 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1 = 9$, (공차) $= -4$ 인 등차수열이므로

$$a_{101} = 9 + (101 - 1) \cdot (-4) = -391$$

27. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (n + 1)a_n$ (n 은 자연수)으로 정의될 때, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2014}$ 을 12로 나눈 나머지는?

- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

주어진 조건에서
 $a_1 = 1$
 $a_2 = 2a_1 = 1 \times 2$
 $a_3 = 3a_2 = 1 \times 2 \times 3$
 $\vdots$
 $a_n = na_{n-1} = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$
그런데, $a_4 = 1 \times 2 \times 3 \times 4$ 는 12의 배수이므로 $a_5, a_6, \cdots, a_{2014}$ 도 12의 배수이다.
따라서, $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2014}$ 을 12로 나눈 나머지는
 $a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 1 \times 2 + 1 \times 2 \times 3$
 $= 1 + 2 + 6$
 $= 9$

28. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = (n+1)a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 으로 정의될 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2014}$ 를 10으로 나눈 나머지는?

- ① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$n = 1, 2, 3, \dots, 2013$ 을 차례대로 대입하여 변끼리 곱한다.
$$a_n = n \times (n-1) \times \dots \times 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot a_1$$
$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n$$
$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 6,$$
$$a_4 = 24, a_5 = 120, a_6 = 6a_5,$$
$$a_7 = 7a_6, \dots$$
따라서, $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2014}$ 을 10으로 나눈 나머지는 3이다.

29. 다음과 같이 정의된 수열의 일반항 a_n 에 대하여 $a_{50} = p - 2^q$ 이라 할 때 $p + q$ 의 값을 구하여라.

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \quad a_2 = 2, \\ 2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n &= 0 \quad (\text{단, } n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -45

해설

$$2a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n = 0$$

$$2(a_{n+2} - a_{n+1}) = a_{n+1} - a_n$$

$a_{n+1} - a_n = b_n$ 이라하면

$$2b_{n+1} = b_n, \quad b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n$$

$$b_1 = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$$

$\therefore \{b_n\}$ 은 초항이 1이고

공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열

$$\therefore b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_{n+1} - a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_2 - a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$$

$$a_3 - a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^1$$

$$\vdots$$
$$+ \left| a_n - a_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \right|$$

$$a_n - a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

$$a_n = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{1}{2}}$$

$$= 1 + 2 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\}$$

$$= 3 - 2 \cdot 2^{-n+1}$$

$$a_n = 3 - 2^{-n+2}$$

$$a_{50} = 3 - 2^{-48}$$

$$p = 3, \quad q = -48 \quad \therefore p + q = -45$$

30. $a_1 = 1, a_2 = 2, 3a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ (단, $n \geq 1$) 으로 정의되는 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $b_n = a_{n+1} - a_n$ 일 때, b_{10} 의 값은?

- ① $-\left(\frac{3}{2}\right)^9$ ② $-\left(\frac{2}{3}\right)^9$ ③ $-\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$
④ $\left(\frac{2}{3}\right)^9$ ⑤ $\left(\frac{2}{3}\right)^{10}$

해설

$$\begin{aligned} 3a_{n+2} &= a_{n+1} + 2a_n \\ 3(a_{n+2} - a_{n+1}) &= -2(a_{n+1} - a_n) \\ 3b_{n+1} &= -2b_n \\ b_{n+1} &= -\frac{2}{3}b_n \\ b_1 &= a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1 \\ \therefore b_n &= \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} \\ \therefore b_{10} &= \left(-\frac{2}{3}\right)^9 = -\left(\frac{2}{3}\right)^9 \end{aligned}$$

31. $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $3a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$ ($n \geq 1$) 으로 정의되는 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{10} 의 값은?

- ① $\frac{8}{5} - \frac{3}{5} \left(-\frac{2}{3}\right)^9$ ② $\frac{8}{5} + \frac{3}{5} \left(-\frac{2}{3}\right)^9$
 ③ $-\frac{3}{5} \left(-\frac{2}{3}\right)^9$ ④ $\frac{8}{5} - \frac{3}{5} \left(-\frac{2}{3}\right)^{10}$
 ⑤ $\frac{8}{5} + \frac{3}{5} \left(-\frac{2}{3}\right)^{10}$

해설

$$3a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \text{ 에서}$$

$$3a_{n+2} - 3a_{n+1} = a_{n+1} + 2a_n - 3a_{n+1}$$

$$3(a_{n+2} - a_{n+1}) = -2(a_{n+1} - a_n)$$

$$a_{n+2} - a_{n+1} = -\frac{2}{3}(a_{n+1} - a_n)$$

이때, $a_{n+2} - a_{n+1} = b_{n+1}$, $a_{n+1} - a_n = b_n$ 이라 하면

$$b_{n+1} = -\frac{2}{3}b_n$$

따라서 계차수열 $\{b_n\}$ 은 첫째항이 $b_1 = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$ 이고,

공비가 $-\frac{2}{3}$ 인 등비수열이므로

$$b_n = 1 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(-\frac{2}{3}\right)^{k-1}$$

$$= 1 + \frac{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)}$$

$$= \frac{8}{5} - \frac{3}{5} \left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_{10} = \frac{8}{5} - \frac{3}{5} \left(-\frac{2}{3}\right)^9$$

32. $a_1 = 5, a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n(n+1)} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_{10} 의 값은 $\frac{n}{m}$ (m, n 은 서로소인 자연수)이다. 이때, $m+n$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 69

해설

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n(n+1)} (n = 1, 2, 3, \dots)$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 의 계차 수열의 일반항은 $\frac{1}{n(n+1)}$ 이다.

$$\begin{aligned} a_n &= 5 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = 5 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 5 \\ &+ \left\{ \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \right\} \\ &= 5 + 1 - \frac{1}{n} = 6 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

따라서, $a_{10} = \frac{59}{10}$ 이므로 $m+n = 69$