1. 다음 설명 중 틀린 것은 ?

① 임의의 집합 A 는 자신의 집합 A 의 부분집합이다.

② 공집합은 임의의 집합의 부분집합이다.

③ 공집합은 공집합의 부분집합이다.

④ 임의의 집합 A 에 대하여 $2^A = \{X \mid X \subset A\}$ 로 정의할 때, $A \subset 2^A$ 이다.

⑤ 집합 A, B 에 대하여 $A - B = \varnothing$ 이면 $A \subset B$ 이다.

해설

③ $\varnothing$ 의 부분집합은 $\varnothing$

④ 예를 들어 $A \in 2^A$, $\{A\} \subset 2^A$, $A = \{1,\ 2\}$ 일 때
$2^A = \{\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ A\} \rightarrow \varnothing \in 2^A$
$\varnothing \subset 2^A$, $\{\varnothing\} \subset 2^A$, $A \in 2^A$, $\{A\} \subset 2^A$

2. 다음 중 부분집합의 개수가 8 개인 집합은?

① $\{0,\ 2\}$

② $\{$ㄱ, ㄷ$\}$

③ $\{\varnothing,\ a,\ e\}$

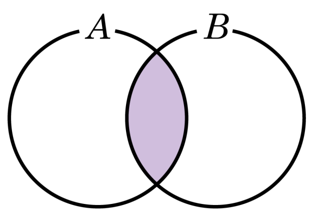
④ $\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$

⑤ $\{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ \cdots\}$

해설

① $2^2 = 4$ (개)
② $2^2 = 4$ (개)
③ $2^3 = 8$ (개)
④ $2^5 = 32$ (개)
⑤ 무수히 많다.

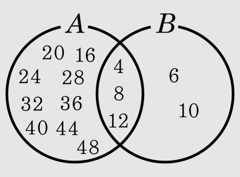
3. 집합 $A = \{x \mid x\text{는 } 48 \text{ 이하의 } 4\text{의 배수}\}$, $B = \{4, 6, 8, 10, 12\}$ 일 때, 다음과 같은 벤 다이어그램에서 색칠한 부분을 나타내는 집합은?



① $\{4, 8, 10\}$ ② $\{4, 6, 8\}$ ③ $\{4, 6, 12\}$
④ $\{4, 8, 12\}$ ⑤ $\{4, 8, 12, 16\}$

해설

벤 다이어그램을 그려보면 다음과 같다.



공통 부분의 원소는 $\{4, 8, 12\}$ 이다.

4. $(A-B) \cup (A \cap B)$ 를 간단히 하면?

① A ② B ③ A^c ④ B^c ⑤ $\varnothing$

해설

$$\begin{aligned}(A \cap B^c) \cup (A \cap B) &= A \cap (B^c \cup B)\\ &= A \cap U = A\end{aligned}$$

5. 30명의 학생에게 A, B 두 문제를 풀게 했더니 A를 푼 학생은 21명, B를 푼 학생은 14명이며, A, B를 모두 못푼 학생은 5명이었다. A, B를 모두 푼 학생의 수는?

① 5명　② 10명　③ 15명　④ 7명　⑤ 17명

해설

$n(U) = 30,\ n(A) = 21,$

$n(B) = 14,\ n(A^c \cap B^c) = 5$ 이므로

$n(A^c \cap B^c) = n(A \cup B)^c = n\left\{U - (A \cup B)\right\}$

$= n(U) - n(A \cup B) = 5$ 에서

$n(A \cup B) = n(U) - 5 = 30 - 5 = 25$

$\therefore n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$

$= 21 + 14 - 25 = 10$ (명)

6. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) - A = \varnothing$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A \subset B$ ② $A \cap B = \varnothing$ ③ $A \cap B = A$
④ $A \cup B = A$ ⑤ $A \cup B = U$

해설

B 집합이 A 집합 안에 포함된다는 의미이므로 ④가 정답이다.

7. 3과 75의 등비중항을 x, 3과 75의 등차중항을 y라 할 때, $x+y$의 값은?

① 45 ② 48 ③ 49 ④ 50 ⑤ 54

해설

x는 3과 75의 등비중항이므로
$x^2 = 3\times 75 = 15^2$
$\therefore\ x = 15$
y는 3과 75의 등차중항이므로
$2y = 3+75 = 78$
$\therefore\ y = 39$
$\therefore\ x+y = 15+39 = 54$

8. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$에 대하여 $a_n = \dfrac{n}{3}$, $b_n = 2^n$일 때, $\sum_{k=1}^{5}(a_k + b_k)$의 값은?

① 61 ② 63 ③ 65 ④ 67 ⑤ 69

해설

$\sum_{k=1}^{5}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{5} a_k + \sum_{k=1}^{5} b_k = \sum_{k=1}^{5} \dfrac{k}{3} + \sum_{k=1}^{5} 2^k$

$= \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{5 \cdot 6}{2} + \dfrac{2(2^5 - 1)}{2 - 1} = 67$

9. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 1, 3, 5를 반드시 포함하는 부분집합의 개수가 32개일 때, 자연수 n의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

집합 A 의 원소의 개수가 n 개이므로 원소 1, 3, 5 를 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 2^{n-3} (개) 이다.
$2^{n-3} = 32,\ 2^{n-3} = 2^5$
$n - 3 = 5$ 이므로 $n = 8$ 이다.

10. 두 집합 $A = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5\}$, $B = \{a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6\}$ 에 대하여 조건 $A \cap X = X$ 및 $(A - B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 5개　② 6개　③ 7개　④ 8개　⑤ 9개

해설

$A \cap X = X$ 에서 $X \subset A$, $(A - B) \cup X = X$ 에서 $(A - B) \subset X$
따라서, $(A - B) \subset X \subset A$ 이므로 X 는 A 의 부분집합 중에서 $A - B = \{a_1,\ a_2\}$ 를 포함하므로 A 의 부분집합 중에서 $a_1,\ a_2$ 를 모두 포함하는 것의 개수이므로
$\therefore 2^{5-2} = 2^3 = 8$(개)

11. 전체집합 U의 두 부분집합 A, B가 $\{(A-B)\cup(A\cap B)\}\cap B = B$를 만족할 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $A \subset B$　　② $A = B$　　③ $A^c \subset B^c$

④ $A \cap B = \varnothing$　　⑤ $A \cup B = U$

해설

$\{(A\cap B^c)\cup(A\cap B)\}\cap B$

$= \{A\cap(B^c\cup B)\}\cap B$

$= (A\cap U)\cap B = A\cap B = B$

즉, $B \subset A$ 이다.

따라서 $A^c \subset B^c$ 역시 성립한다.

12. 전체집합 $U = \{x \mid x$는 50 이하의 양의 짝수$\}$ 에 대하여 세 조건 $p : x$는 48 의 약수, $q : 0 < x < 30$, $r : x^2 - 10x + 24 = 0$ 일 때, 'p 이고 q 이고 $\sim r$' 를 만족하는 집합에 속하지 <u>않는</u> 것은?

① 6 ② 8 ③ 12 ④ 16 ⑤ 24

해설

조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 하면
$P = \{2, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$
$Q = \{2, 4, 6, 8, 10, \cdots, 28\}$
$R = \{4, 6\}$
'p 이고 q 이고 $\sim r$' 를 만족하는 집합은 $P \cap Q \cap R^c$ 이므로
$P \cap Q \cap R^c = \{2, 8, 12, 16, 24\}$

13. 다음<보기1>의 명제와<보기2>의 명제가 서로 밀접한 관계가 있는 것끼리 옳게 짝지어진 것을 고르면?

보기1

Ⅰ. 임의의 집합 A, B 에 대해 항상 성립한다.
Ⅱ. $A \subset B$ 와 동치이다.
Ⅲ. $A \cap B = \phi$ 와 동치이다.

보기2

가. $A \cap (A \cup B) = A$
나. $A \cap B = A$
다. $A \cap B^c = A$

① Ⅰ-가, Ⅱ-나, Ⅲ-다　② Ⅰ-가, Ⅱ-다, Ⅲ-나
③ Ⅰ-나, Ⅱ-가, Ⅲ-다　④ Ⅰ-나, Ⅱ-다, Ⅲ-가
⑤ Ⅰ-다, Ⅱ-가, Ⅲ-나

해설

Ⅰ. 임의의 집합 A, B 에 대하여 $A \subset (A \cup B)$
$\therefore \ A \cap (A \cup B) = A$
따라서 Ⅰ-가
Ⅱ. $A \subset B \iff A \cap B = A$ 따라서, Ⅱ -나
Ⅲ. $A \cap B^c = A \iff A \cap B = \phi$ 따라서, Ⅲ -다

14. 다음 중 대우가 참인 것을 고르면?

① 평행사변형은 직사각형이다.

② 2 의 배수는 4 의 배수이다.

③ m, n 이 홀수이면 $m+n$ 은 홀수이다.

④ $x^2-9=0$ 이면 $x-3=0$ 이다.

⑤ $x \geq 2$ 이면 $x^2 \geq 4$ 이다.

해설

⑤ 최솟값 2 를 제곱하면 4 이므로 참이다.

15. 첫째항이 3이고, 첫째항부터 제 n항까지의 합이 $S_n = n^2 + pn$인 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라고 할 때, $p+d$의 값은? (단, p는 상수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$S_n = n^2 + pn$

$S_{n-1} = (n-1)^2 + p(n-1)$

$$
\begin{aligned}
a_n &= S_n - S_{n-1} (n \geq 2) \\
&= n^2 + pn - (n^2 - 2n + 1 + pn - p) \\
&= 2n - 1 + p \ \rightarrow d = 2
\end{aligned}
$$

$a_1 = 1^2 + p = 3$

$p = 2$

$\therefore p + d = 2 + 2 = 4$

16. 두 수 3과 -96 사이에 네 실수 $a,\ b,\ c,\ d$를 넣어서 이 순서로 등비수열을 이루도록 할 때, $a+b+c+d$의 값은?

① 18　　② 24　　③ 30　　④ 36　　⑤ 42

해설

공비를 r이라고 하면 $-96=3\cdot r^5$에서

$r^5=-32 \quad \therefore\ r=-2$

따라서 네 수 $a,\ b,\ c,\ d$의 값은 각각 $-6,\ 12,\ -24,\ 48$이므로

$a+b+c+d=(-6)+12+(-24)+48=30$

17. $a_1 = 3,\ a_2 = 5,\ a_{n+1} = a_n - a_{n-1}(n \geq 2)$로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 제 2014항은?

① 5　② 3　③ -2　④ -3　⑤ -5

해설

$a_1 = 3$

$a_2 = 5$

$a_3 = a_2 - a_1 = 5 - 3 = 2$

$a_4 = a_3 - a_2 = 2 - 5 = -3$

$a_5 = a_4 - a_3 = -3 - 2 = -5$

$a_6 = a_5 - a_4 = -5 - (-3) = -2$

$a_7 = a_6 - a_5 = -2 - (-5) = 3$

$a_8 = a_7 - a_6 = 3 - (-2) = 5$

$\vdots$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 $3,\ 5,\ 2,\ -3,\ -5,\ -2$가 계속해서 반복된다.

이 때, $2014 = 6 \times 335 + 4$이므로

$a_{2014} = a_4 = -3$

18. 자연수 k에 대하여 $a_k = \sqrt{k - \sqrt{k^2 - 1}}$이라 할 때, $\sum_{k=1}^{80} a_k = a\sqrt{2} + b\sqrt{10}$을 만족하는 두 유리수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값은?

① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설

$a_k = \sqrt{k - \sqrt{k^2 - 1}}$

$= \dfrac{\sqrt{2k - 2\sqrt{(k+1)(k-1)}}}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1}}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ \sum_{k=1}^{80} a_k = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{80} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1})$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2} \left\{ (\sqrt{2} - \sqrt{0}) + (\sqrt{3} - \sqrt{1}) \right\}$

$+ \cdots + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \left\{ (\sqrt{80} - \sqrt{78}) - (\sqrt{81} - \sqrt{79}) \right\}$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-0 - 1 + \sqrt{80} + 9)$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}(8 + 4\sqrt{5})$

$= 4\sqrt{2} + 2\sqrt{10}$

따라서 $a = 4,\ b = 2$ 이므로 $a + b = 6$

19. $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{n}{n+1}$ ② $\frac{2n}{n+1}$ ③ $\frac{3n}{n+1}$ ④ $\frac{4n}{n+1}$ ⑤ $\frac{5n}{n+1}$

해설

(주어진 식)$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}$

$=2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=2\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}$

20. 함수 $f(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{20} \dfrac{2k+1}{f(k)}$ 의 값은?

① $\dfrac{40}{7}$　② $\dfrac{45}{8}$　③ $\dfrac{17}{3}$　④ $\dfrac{57}{10}$　⑤ $\dfrac{63}{11}$

해설

$f(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$

$= \sum_{k=1}^{20} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 이므로

$\sum_{k=1}^{20} \dfrac{2k+1}{f(x)} = \sum_{k=1}^{20} \dfrac{2k+1}{\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}}$

$= \sum_{k=1}^{20} \dfrac{6}{k(k+1)} = 6\sum_{k=1}^{20} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right)$

$= 6\left(1 - \dfrac{1}{21}\right) = 6 \times \dfrac{20}{21} = \dfrac{40}{7}$

21. 수열 $\{a_n\}$이 $a_n + S_n = n$과 같이 정의될 때, 일반항 a_n은?(단, $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ \ S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$)

① $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$　② $2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$　③ $3 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$
④ $1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$　⑤ $2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

해설

$a_1 + S_1 = 1,\ S_1 = a_1$ 이므로 $2a_1 = 1$

$\therefore\ a_1 = \frac{1}{2}$

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1} + S_{n+1} = n+1 \\ -) & a_n + S_n \quad = n \\ \hline & a_{n+1} - a_n + a_{n+1} = 1 \end{array}$$

에서 $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$\therefore\ a_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(a_n - 1)(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

이때, 수열 $\{a_n - 1\}$은 첫째항이 $-\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

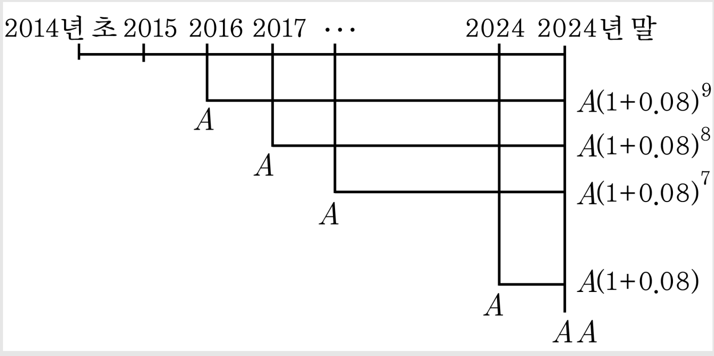
$a_n - 1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　　$\therefore\ a_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

22. 진영이와 선경이는 연이율이 8% 인 복리로 2014 년 초에 은행에서 각각 1000만원을 대출받았다. 진영이는 2015 년 초에 A 만원씩 갚아서 2024 년초까지 10 년에 걸쳐 모두 상환하려고 하고, 선경이는 2015 년 말부터 매년 말에 B 원씩 갚아서 2024 년 말까지 10 년에 걸쳐 모두 상환하려고 한다. 이때, $\frac{A}{B}$ 의 값은?

① $\frac{23}{25}$ ② $\frac{25}{27}$ ③ 1 ④ $\frac{25}{23}$ ⑤ $\frac{27}{25}$

해설

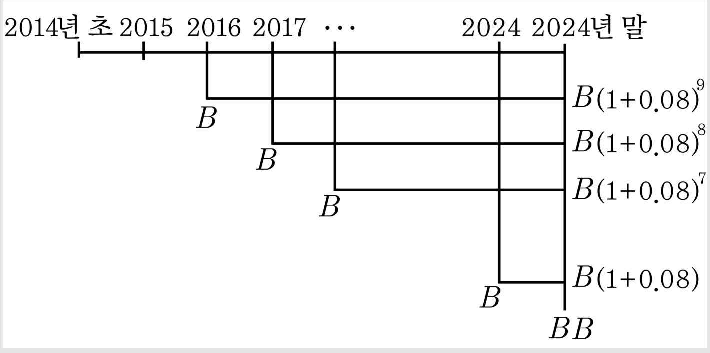
진영이가 마지막으로 모두 상환하는 해는 2024 년 초이므로 진영이가 빌린 돈은 2024 년 초에 원리합계가 $1000\cdot1.08^{10}$(만원) 이다.



$A\cdot1.08^9+A\cdot1.08^8+A\cdot1.08^7+\cdots+A\cdot1.08+A=1000\cdot1.08^{10}$(만원)

$\therefore \frac{A(1.08^{10}-1)}{1.08-1}=1000\cdot1.08^{10}$(만원)

한편, 선경이가 마지막으로 모두 상환하는 해는 2024 년 말이므로 선경이가 빌린 돈은 2024 년 말에 원리합계가 $1000\cdot1.08^{10}$(만원) 이다.



$B\cdot1.08^9+B\cdot1.08^8+B\cdot1.08^7+\cdots+B\cdot1.08+B=1000\cdot1.08^{11}$(만원) $\therefore \frac{B(1.08^{10}-1)}{1.08-1}=1000\cdot1.08^{11}$(만원)

$\therefore \frac{A}{B}=\frac{1}{1.08}=\frac{100}{108}=\frac{25}{27}$