

1. 다음 설명 중 틀린 것은 ?

- ① 임의의 집합 A 는 자신의 집합 A 의 부분집합이다.
- ② 공집합은 임의의 집합의 부분집합이다.
- ③ 공집합은 공집합의 부분집합이다.
- ④ 임의의 집합 A 에 대하여 $2^A = \{X \mid X \subset A\}$ 로 정의할 때, $A \subset 2^A$ 이다.
- ⑤ 집합 A, B 에 대하여 $A - B = \emptyset$ 이면 $A \subset B$ 이다.

해설

- ③ $\emptyset$ 의 부분집합은 $\emptyset$
- ④ 예를 들어 $A \in 2^A$, $\{A\} \subset 2^A$, $A = \{1, 2\}$ 일 때
 $2^A = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, A\} \rightarrow \emptyset \in 2^A$
 $\emptyset \subset 2^A$, $\{\emptyset\} \subset 2^A$, $A \in 2^A$, $\{A\} \subset 2^A$

2. 다음 중 부분집합의 개수가 8 개인 집합은?

① $\{0, 2\}$

② $\{\neg, \sqsubset\}$

③ $\{\emptyset, a, e\}$

④ $\{a, b, c, d, e\}$

⑤ $\{3, 6, 9, 12, \dots\}$

해설

① $2^2 = 4$ (개)

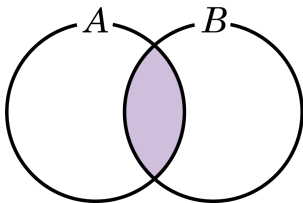
② $2^2 = 4$ (개)

③ $2^3 = 8$ (개)

④ $2^5 = 32$ (개)

⑤ 무수히 많다.

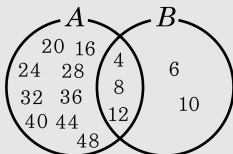
3. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 48 \text{ 이하의 } 4\text{의 배수}\}$, $B = \{4, 6, 8, 10, 12\}$ 일 때, 다음과 같은 벤 다이어그램에서 색칠한 부분을 나타내는 집합은?



- ① $\{4, 8, 10\}$ ② $\{4, 6, 8\}$ ③ $\{4, 6, 12\}$
 ④ $\{4, 8, 12\}$ ⑤ $\{4, 8, 12, 16\}$

해설

벤 다이어그램을 그려보면 다음과 같다.



공통 부분의 원소는 $\{4, 8, 12\}$ 이다.

4. $(A - B) \cup (A \cap B)$ 를 간단히 하면?

① A

② B

③ A^c

④ B^c

⑤ $\emptyset$

해설

$$\begin{aligned}(A \cap B^c) \cup (A \cap B) &= A \cap (B^c \cup B) \\ &= A \cap U = A\end{aligned}$$

5. 30명의 학생에게 A, B 두 문제를 풀게 했더니 A 를 푼 학생은 21명, B 를 푼 학생은 14명이며, A, B 를 모두 못푼 학생은 5명이었다. A, B 를 모두 푼 학생의 수는?

① 5명

② 10명

③ 15명

④ 7명

⑤ 17명

해설

$$n(U) = 30, n(A) = 21,$$

$$n(B) = 14, n(A^c \cap B^c) = 5 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} n(A^c \cap B^c) &= n(A \cup B)^c = n\{U - (A \cup B)\} \\ &= n(U) - n(A \cup B) = 5 \text{ 에서} \end{aligned}$$

$$n(A \cup B) = n(U) - 5 = 30 - 5 = 25$$

$$\begin{aligned} \therefore n(A \cap B) &= n(A) + n(B) - n(A \cup B) \\ &= 21 + 14 - 25 = 10 \text{ (명)} \end{aligned}$$

6. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) - A = \emptyset$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A \subset B$

② $A \cap B = \emptyset$

③ $A \cap B = A$

④ $A \cup B = A$

⑤ $A \cup B = U$

해설

B 집합이 A 집합 안에 포함된다는 의미이므로 ④가 정답이다.

7. 3과 75의 등비중항을 x , 3과 75의 등차중항을 y 라 할 때, $x + y$ 의 값은?

① 45

② 48

③ 49

④ 50

⑤ 54

해설

x 는 3과 75의 등비중항이므로

$$x^2 = 3 \times 75 = 15^2$$

$$\therefore x = 15$$

y 는 3과 75의 등차중항이므로

$$2y = 3 + 75 = 78$$

$$\therefore y = 39$$

$$\therefore x + y = 15 + 39 = 54$$

8. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여 $a_n = \frac{n}{3}$, $b_n = 2^n$ 일 때, $\sum_{k=1}^5 (a_k + b_k)$ 의 값은?

① 61

② 63

③ 65

④ 67

⑤ 69

해설

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^5 (a_k + b_k) &= \sum_{k=1}^5 a_k + \sum_{k=1}^5 b_k = \sum_{k=1}^5 \frac{k}{3} + \sum_{k=1}^5 2^k \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{5 \cdot 6}{2} + \frac{2(2^5 - 1)}{2 - 1} = 67\end{aligned}$$

9. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n\}$ 의 부분집합 중에서 원소 1, 3, 5를 반드시 포함하는 부분집합의 개수가 32개일 때, 자연수 n 의 값은?

① 7

② 8

③ 9

④ 10

⑤ 11

해설

집합 A 의 원소의 개수가 n 개이므로 원소 1, 3, 5를 반드시 포함하는 부분집합의 개수는 2^{n-3} (개)이다.

$$2^{n-3} = 32, \quad 2^{n-3} = 2^5$$

$$n - 3 = 5 \text{ 이므로 } n = 8 \text{이다.}$$

10. 두 집합 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $B = \{a_3, a_4, a_5, a_6\}$ 에 대하여 조건 $A \cap X = X$ 및 $(A - B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 5개

② 6개

③ 7개

④ 8개

⑤ 9개

해설

$A \cap X = X$ 에서 $X \subset A$, $(A - B) \cup X = X$ 에서 $(A - B) \subset X$
따라서, $(A - B) \subset X \subset A$ 이므로 X 는 A 의 부분집합 중에서
 $A - B = \{a_1, a_2\}$ 를 포함하므로 A 의 부분집합 중에서 a_1, a_2 를
모두 포함하는 것의 개수이므로
 $\therefore 2^{5-2} = 2^3 = 8(\text{개})$

11. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 가 $\{(A - B) \cup (A \cap B)\} \cap B = B$ 를 만족할 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $A \subset B$

② $A = B$

③ $A^c \subset B^c$

④ $A \cap B = \emptyset$

⑤ $A \cup B = U$

해설

$$\begin{aligned} & \{(A \cap B^c) \cup (A \cap B)\} \cap B \\ &= \{A \cap (B^c \cup B)\} \cap B \\ &= (A \cap U) \cap B = A \cap B = B \end{aligned}$$

즉, $B \subset A$ 이다.

따라서 $A^c \subset B^c$ 역시 성립한다.

12. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 50 \text{ 이하의 양의 짝수}\}$ 에 대하여 세 조건 $p : x$ 는 48 의 약수, $q : 0 < x < 30$, $r : x^2 - 10x + 24 = 0$ 일 때, ' p 이고 q 이고 $\sim r$ ' 를 만족하는 집합에 속하지 않는 것은?

① 6

② 8

③ 12

④ 16

⑤ 24

해설

조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 하면

$$P = \{2, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$$

$$Q = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots, 28\}$$

$$R = \{4, 6\}$$

' p 이고 q 이고 $\sim r$ ' 를 만족하는 집합은 $P \cap Q \cap R^c$ 이므로

$$P \cap Q \cap R^c = \{2, 8, 12, 16, 24\}$$

13. 다음 <보기1>의 명제와 <보기2>의 명제가 서로 밀접한 관계가 있는 것끼리 옳게 짝지어진 것을 고르면?

보기1

- I. 임의의 집합 A, B 에 대해 항상 성립한다.
II. $A \subset B$ 와 동치이다.
III. $A \cap B = \emptyset$ 와 동치이다.

보기2

- 가. $A \cap (A \cup B) = A$
나. $A \cap B = A$
다. $A \cap B^c = A$

- ① I-가, II-나, III-다 ② I-가, II-다, III-나
③ I-나, II-가, III-다 ④ I-나, II-다, III-가
⑤ I-다, II-가, III-나

해설

I. 임의의 집합 A, B 에 대하여 $A \subset (A \cup B)$

$$\therefore A \cap (A \cup B) = A$$

따라서 I-가

II. $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A$ 따라서, II-나

III. $A \cap B^c = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$ 따라서, III-다

14. 다음 중 대우가 참인 것을 고르면?

- ① 평행사변형은 직사각형이다.
- ② 2의 배수는 4의 배수이다.
- ③ m, n 이 홀수이면 $m + n$ 은 홀수이다.
- ④ $x^2 - 9 = 0$ 이면 $x - 3 = 0$ 이다.
- ⑤ $x \geq 2$ 이면 $x^2 \geq 4$ 이다.

해설

⑤ 최솟값 2를 제공하면 4이므로 참이다.

15. 첫째항이 3이고, 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 $S_n = n^2 + pn$ 인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 공차를 d 라고 할 때, $p+d$ 의 값은? (단, p 는 상수)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$S_n = n^2 + pn$$

$$S_{n-1} = (n-1)^2 + p(n-1)$$

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \quad (n \geq 2) \\ &= n^2 + pn - (n^2 - 2n + 1 + pn - p) \\ &= 2n - 1 + p \rightarrow d = 2 \end{aligned}$$

$$a_1 = 1^2 + p = 3$$

$$p = 2$$

$$\therefore p + d = 2 + 2 = 4$$

16. 두 수 3과 -96 사이에 네 실수 a, b, c, d 를 넣어서 이 순서로 등비수열을 이루도록 할 때, $a + b + c + d$ 의 값은?

① 18

② 24

③ 30

④ 36

⑤ 42

해설

공비를 r 이라고 하면 $-96 = 3 \cdot r^5$ 에서

$$r^5 = -32 \quad \therefore r = -2$$

따라서 네 수 a, b, c, d 의 값은 각각 -6, 12, -24, 48이므로

$$a + b + c + d = (-6) + 12 + (-24) + 48 = 30$$

17. $a_1 = 3, a_2 = 5, a_{n+1} = a_n - a_{n-1} (n \geq 2)$ 로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 제 2014 항은?

① 5

② 3

③ -2

④ -3

⑤ -5

해설

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 5$$

$$a_3 = a_2 - a_1 = 5 - 3 = 2$$

$$a_4 = a_3 - a_2 = 2 - 5 = -3$$

$$a_5 = a_4 - a_3 = -3 - 2 = -5$$

$$a_6 = a_5 - a_4 = -5 - (-3) = -2$$

$$a_7 = a_6 - a_5 = -2 - (-5) = 3$$

$$a_8 = a_7 - a_6 = 3 - (-2) = 5$$

$\vdots$

이므로 수열 $\{a_n\}$ 은 3, 5, 2, -3, -5, -2가 계속해서 반복된다.

이 때, $2014 = 6 \times 335 + 4$ 이므로

$$a_{2014} = a_4 = -3$$

18. 자연수 k 에 대하여 $a_k = \sqrt{k - \sqrt{k^2 - 1}}$ 이라 할 때, $\sum_{k=1}^{80} a_k = a\sqrt{2} + b\sqrt{10}$ 을 만족하는 두 유리수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

$$\begin{aligned}
 a_k &= \sqrt{k - \sqrt{k^2 - 1}} \\
 &= \frac{\sqrt{2k - 2\sqrt{(k+1)(k-1)}}}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1}}{\sqrt{2}} \\
 \therefore \sum_{k=1}^{80} a_k &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{80} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k-1}) \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \{(\sqrt{2} - \sqrt{0}) + (\sqrt{3} - \sqrt{1})\} \\
 &\quad + \cdots + \frac{\sqrt{2}}{2} \{(\sqrt{80} - \sqrt{78}) - (\sqrt{81} - \sqrt{79})\} \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} (-0 - 1 + \sqrt{80} + 9) \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} (8 + 4\sqrt{5}) \\
 &= 4\sqrt{2} + 2\sqrt{10} \\
 \text{따라서 } a &= 4, b = 2 \text{ 이므로 } a + b = 6
 \end{aligned}$$

19. $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{n}{n+1}$

② $\frac{2n}{n+1}$

③ $\frac{3n}{n+1}$

④ $\frac{4n}{n+1}$

⑤ $\frac{5n}{n+1}$

해설

$$(\text{주어진 식}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}$$

$$= 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$$

$$= 2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{2n}{n+1}$$

20. 함수 $f(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{20} \frac{2k+1}{f(k)}$ 의 값은?

① $\frac{40}{7}$

② $\frac{45}{8}$

③ $\frac{17}{3}$

④ $\frac{57}{10}$

⑤ $\frac{63}{11}$

해설

$$\begin{aligned} f(n) &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 \\ &= \sum_{k=1}^{20} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ 이므로} \\ \sum_{k=1}^{20} \frac{2k+1}{f(x)} &= \sum_{k=1}^{20} \frac{2k+1}{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}} \\ &= \sum_{k=1}^{20} \frac{6}{k(k+1)} = 6 \sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 6 \left(1 - \frac{1}{21} \right) = 6 \times \frac{20}{21} = \frac{40}{7} \end{aligned}$$

21. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_n + S_n = n$ 과 같이 정의될 때, 일반항 a_n 은? (단, $n = 1, 2, 3, \dots, S_n = \sum_{k=1}^n a_k$)

① $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

② $2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

③ $3 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

④ $1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

⑤ $2 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

해설

$$a_1 + S_1 = 1, S_1 = a_1 \text{ 이므로 } 2a_1 = 1$$

$$\therefore a_1 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{array}{r} a_{n+1} + S_{n+1} = n+1 \\ -) a_n + S_n = n \\ \hline a_{n+1} - a_n + a_{n+1} = 1 \end{array}$$

$$\text{에서 } a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2} (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$\therefore a_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(a_n - 1) (n = 1, 2, 3, \dots)$$

이때, 수열 $\{a_n - 1\}$ 은 첫째항이 $-\frac{1}{2}$, 공비가 $\frac{1}{2}$ 인 등비수열이므로

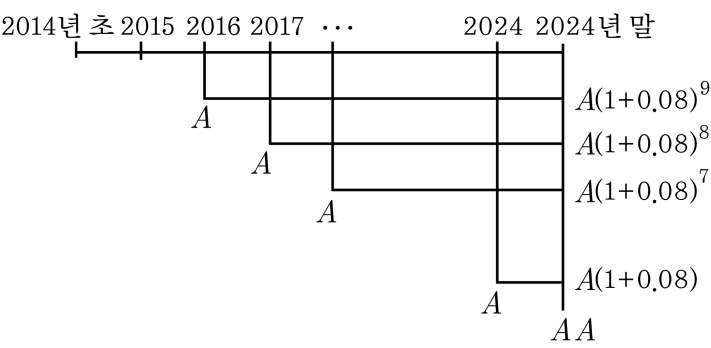
$$a_n - 1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \therefore a_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

22. 진영이와 선경이는 연이율이 8%인 복리로 2014년 초에 은행에서 각각 1000만원을 대출받았다. 진영이는 2015년 초에 A 만원씩 갚아서 2024년초까지 10년에 걸쳐 모두 상환하려고 하고, 선경이는 2015년 말부터 매년 말에 B 원씩 갚아서 2024년 말까지 10년에 걸쳐 모두 상환하려고 한다. 이때, $\frac{A}{B}$ 의 값은?

- ① $\frac{23}{25}$
- ② $\frac{25}{27}$
- ③ 1
- ④ $\frac{25}{23}$
- ⑤ $\frac{27}{25}$

해설

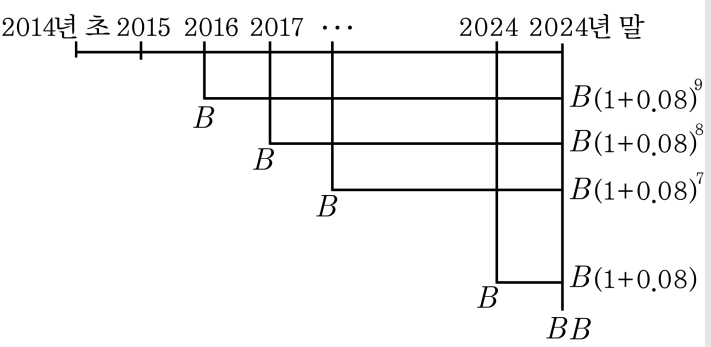
진영이가 마지막으로 모두 상환하는 해는 2024년 초이므로 진영이가 빌린 돈은 2024년 초에 원리합계가 $1000 \cdot 1.08^{10}$ (만원)이다.



$$A \cdot 1.08^9 + A \cdot 1.08^8 + A \cdot 1.08^7 + \cdots + A \cdot 1.08 + A = 1000 \cdot 1.08^{10} \text{(만원)}$$

$$\therefore \frac{A(1.08^{10} - 1)}{1.08 - 1} = 1000 \cdot 1.08^{10} \text{(만원)}$$

한편, 선경이가 마지막으로 모두 상환하는 해는 2024년 말이므로 선경이가 빌린 돈은 2024년 말에 원리합계가 $1000 \cdot 1.08^{10}$ (만원)이다.



$$B \cdot 1.08^9 + B \cdot 1.08^8 + B \cdot 1.08^7 + \cdots + B \cdot 1.08 + B = 1000 \cdot 1.08^{11} \text{(만원)}$$

$$\therefore \frac{B(1.08^{10} - 1)}{1.08 - 1} = 1000 \cdot 1.08^{11} \text{(만원)}$$

$$\therefore \frac{A}{B} = \frac{1}{1.08} = \frac{100}{108} = \frac{25}{27}$$