1. 이차방정식 $x^2-4x+k=0$의 두 실근이 모두 3보다 작기 위한 실수 k의 범위를 구하면 $m<k\le n$이다. mn의 값을 구하면?

① 10 ② 12 ③ -15 ④ -12 ⑤ -10

해설

ⅰ) $D/4=4-k\ge 0,\ k\le 4$
ⅱ) $f(3)>0,\ k>3$ 따라서,
ⅰ) ⅱ)를 모두 만족하는 k의 범위는 $3<k\le 4$
$m=3,\ n=4$이므로 $mn=12$

2. x에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + 9 = 0$이 $x < 1$에서 두 개의 실근을 갖도록 하는 실수 a의 범위를 구하면 $a \le k$이다. 이 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = -6$

해설

$f(x) = x^2 - ax + 9$라 놓으면

i) 축이 $x < 1$에 있어야 하므로 $\frac{1}{2}a < 1$, $a < 2$

ii) $f(1) > 0$, $1 - a + 9 > 0$, $a < 10$

iii) 두 개의 실근을 가져야 하므로

$\mathrm{D} = a^2 - 4 \cdot 9 \ge 0$, $a \ge 6$, $a \le -6$

따라서 i), ii), iii)에 의해 $a \le -6$

$\therefore k = -6$

3. x 에 대한 이차방정식 $x^2-2kx+6-k=0$ 의 서로 다른 두 근이 모두 -1 보다 작을 때, 정수 k 의 개수를 구하여라.

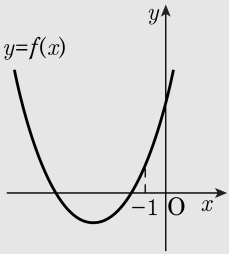
▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 3 개

해설

$f(x)=x^2-2kx+6-k$ 라 하면

방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 두 근이 -1 보다 작으므로



(i) $\dfrac{D}{4}=(-k)^2-(6-k)>0$ 에서

$k^2+k-6>0,\ (k+3)(k-2)>0$

$\therefore\ k<-3$ 또는 $k>2$

(ii) $f(-1)=1+2k+6-k>0$ 에서 $k>-7$

(iii) $-\dfrac{-2k}{2}<-1$ 에서 $k<-1$

이상에서 $-7<k<-3$

따라서 정수 k 는 $-6,\ -5,\ -4$ 의 3 개다.

4. 이차방정식 $x^2-2mx+m+6=0$의 두 근이 모두 1보다 작을 때, 실수 m의 값의 범위를 구하면?

① $m \le -6$ ② $m \le -4$ ③ $m \le -2$

④ $m \le 0$ ⑤ $m \le 2$

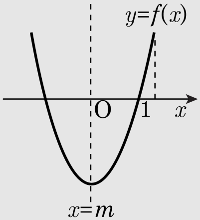
해설

$f(x)=x^2-2mx+m+6=(x-m)^2-m^2+m+6$으로 놓으면

$\dfrac{D}{4}=m^2-1\cdot(m+6)=m^2-m-6$

$f(1)=1-2m+m+6=-m+7$

두 근이 모두 1보다 작으려면 $y=f(x)$의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



따라서,

(ⅰ) 판별식 : $\dfrac{D}{4}=m^2-m-6 \ge 0$

$(m+2)(m-3) \ge 0$

$\therefore m \le -2$ 또는 $m \ge 3 \cdots\cdots$ ㉠

(ⅱ) 경계값의 부호 : $f(1)=-m+7>0$

$\therefore m<7 \quad \cdots\cdots$ ㉡

(ⅲ) 축 : $m<1 \cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢으로부터 구하는 m의 값의 범위는 $m \le -2$

5. 이차방정식 $x^2 + ax + 2a - 3 = 0$ 의 두 근이 $-2,\ 1$ 사이에 있을 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $\frac{2}{3} < a \le 2$ ② $-2 < a < 4$ ③ $-4 \le a \le 2$
④ $\frac{2}{3} < a \le 4$ ⑤ $a \ge 6$

해설

$f(x) = x^2 + ax + 2a - 3$ 으로 놓으면
이차방정식 $f(x) = 0$ 의 두 근이 -2 와 1
사이에 있으므로
(i) $D = a^2 - 4(2a-3) \ge 0$ 에서
$a^2 - 8a + 12 \ge 0$, $(a-2)(a-6) \ge 0$
$\therefore\ a \le 2$ 또는 $a \ge 6$
(ii) $f(-2) = 4 - 2a + 2a - 3 > 0$ 에서
$1 > 0$ 이므로 항상 성립한다.
(iii) $f(1) = 1 + a + 2a - 3 > 0$ 에서
$3a > 2 \quad \therefore\ a > \frac{2}{3}$
(iv) 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 축의
방정식이 $x = -\frac{a}{2}$ 이므로
$-2 < -\frac{a}{2} < 1$
$\therefore\ -2 < a < 4$
따라서 a 의 값의 범위는 $\frac{2}{3} < a \le 2$

6. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근은 -1과 0 사이에 있고, 다른 근은 0과 2 사이에 있을 때 정수 a, b에 대하여, $a+b$의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$f(x)=x^2+ax+b$ 라고 놓을 때

$$\begin{cases} f(-1)=1-a+b>0 & \cdots ① \\ f(0)=b<0 & \cdots ② \\ f(2)=4+2a+b>0 & \cdots ③ \end{cases}$$

①$\times 2+$③하면 $6+3b>0$

$\therefore\ b>-2$

이것과 ②에서 $-2<b<0$

$\therefore\ b=-1$ ($\because$ b는 정수)

이 값을 ①, ③에 대입하면

$1-a-1>0,\ 4+2a-1>0$

$\therefore\ -\frac{3}{2}<a<0$

$\therefore\ a=-1$ ($\because$ a는 정수)

$\therefore\ a=-1,\ b=-1,\ a+b=-2$

7. 이차함수 $y = 2x^2 + ax + 12$의 그래프와 직선 $y = 5x + b$가 두 점 P, Q에서 만난다. 선분 PQ의 중점의 좌표가 $(3,\ 17)$일 때, $a + b$의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

해설

두 점 P, Q 의 x 좌표를 각각 α, β 라고 하면

α, β 는 이차방정식 $2x^2 + ax + 12 = 5x + b$의 두 실근이다.

$2x^2 + (a - 5)x + 12 - b = 0$에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = -\dfrac{a - 5}{2}$ $\cdots\cdots$ ㉠

또, 선분 PQ의 중점의 x좌표가 3이므로

$\dfrac{\alpha + \beta}{2} = 3$에서 $\alpha + \beta = 6$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $-\dfrac{a - 5}{2} = 6$

$\therefore a = -7$

또, 점 $(3,\ 17)$은 직선 $y = 5x + b$ 위의 점이므로 $17 = 5 \cdot 3 + b$ $\therefore$ $b = 2$

$\therefore a + b = -7 + 2 = -5$

8. 이차함수$y = ax^2 - 5x - 2$ 의 그래프와 직선 $y = bx + a$ 의 교점의 x 좌표가 각각 $0, -3$ 일 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

해설

이차함수 $y = ax^2 - 5x - 2$ 의 그래프와
직선 $y = bx + a$ 의 교점의 x 좌표 $0, -3$ 은
이차방정식 $ax^2 - (b+5)x - a - 2 = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$(\text{두근의합}) = 0 + (-3) = \frac{b+5}{a}$$

$\therefore\ 3a + b = -5 \cdots$ ㉠

$$(\text{두 근의 곱}) = 0 \cdot (-3) = \frac{-a-2}{a}$$

$\therefore a = -2$

㉠에서 $b = 1$ 이므로 $a + b = -1$

9. x에 대한 이차방정식 $x^2-(k^2-3k-4)x+2-k=0$의 두 실근을 α, β라 할 때, α는 양수이고 β는 음수이다. β의 절댓값이 α의 절댓값보다 클 때, 정수 k의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

(두 근의 합) $= k^2-3k-4=(k-4)(k+1)<0$

$-1<k<4$

(두 근의 곱) $=2-k<0$에서 $k>2$

$\therefore 2<k<4$

10. 이차방정식 $x^2+2(k-11)x-k+3=0$이 서로 다른 부호의 실근을 갖고, 양근이 음근의 절댓값보다 크기 위한 정수 k의 개수는?

① 5개 ② 6개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 9개

해설

두 근을 α, β라 할 때,

$\alpha\beta=-k+3<0$, $\alpha+\beta=-2(k-11)>0$

$\therefore\quad 3<k<11$