1. 다음 중 명제가 아닌 것은?

① 6과 18의 최대공약수는 3 이다.
② 설악산은 제주도에 있다.
③ $x = 2$ 이면 $3x = 6$ 이다.
④ $x + 1 < 0$
⑤ 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 $180°$이다.

해설

명제는 참과 거짓을 명확하게 판단할 수 있는 문장이나 식을 말한다. ①, ②는 거짓 명제이고, ③, ⑤는 참인 명제이다. 그러나 ④는 x의 값에 따라서 참일 수도 있고 거짓일 수도 있으므로 명제가 아니다.

2. 다음 명제 중에서 그 부정이 참인 것을 <u>모두</u> 고르면?

① $2 < \sqrt{6} \le 3$

② 2는 소수가 아니다.

③ $2 > 3$ 또는 $3 \le 5$

④ $2 \le \sqrt{3} < 3$

⑤ 24는 4와 6의 공배수이다.

해설

거짓인 명제의 부정은 참이므로 거짓인 명제를 찾으면 된다. ①, ③, ⑤는 참인 명제이고, 2는 소수이고 $\sqrt{3} = 1.7\cdots$ 이므로 ②, ④는 거짓인 명제이다.

3. 전체집합 U 에서 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 할 때, 명제 $\sim p \to q$ 가 참일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은? (단, $U \neq \varnothing$)

① $P^c \subset Q$ ② $P \cap Q = \varnothing$ ③ $P^c \cap Q^c = \varnothing$
④ $P \cap Q^c = Q^c$ ⑤ $P \cup Q = U$

해설

$\sim p \to q$를 확인하기 위해 대우의 참, 거짓을 판별하거나 포함 관계를 본다.
$P^c \subset Q$ 이려면 $(P \cup Q)^c = \varnothing$ 이어야 한다.
$\therefore P \cup Q = U, P^c \cap Q^c = \varnothing$
$P \cap Q = \varnothing$ 는 알 수 없다.

4. 다음 중 명제 '$x+y \geq 2$ 이고 $xy \geq 1$ 이면, $x \geq 1$ 이고 $y \geq 1$ 이다.' 가 거짓임을 보이는 반례는?

① $x=1,\ y=\frac{1}{2}$
② $x=100,\ y=\frac{1}{2}$
③ $x=1,\ y=1$
④ $x=2,\ y=4$
⑤ $x=-1,\ y=-5$

해설

$x+y \geq 2,\ xy \geq 1$ 는 만족하지만, $x \geq 1, y \geq 1$ 은 만족하지 않는 반례를 찾는다.
$\therefore x=100, y=\frac{1}{2}$ 일 때, 거짓이다.

5. 명제「내일 소풍가지 않으면, 비가 온다.」의 대우는?

① 내일 소풍가면, 비가 오지 않는다.

② 내일 비가 오면, 소풍 가지 않는다.

③ 내일 비가 오지 않으면, 소풍 간다.

④ 내일 소풍 가지 않으면, 비가 오지 않는다.

⑤ 내일 소풍 가면, 비가 온다.

해설

명제 '$p \rightarrow q$'의 대우는 '$\sim q \rightarrow \sim p$' 이다.
p : 소풍가지 않는다. q : 비가 온다.
따라서 $\sim q \rightarrow \sim p$: 내일 비가 오지 않으면, 소풍 간다.(여기에서 '내일'은 가정, 결론에 포함되는 것이 아니라 명제의 대전제가 되는 부분이다.)

6. 조건 p가 조건 q이기 위한 충분조건일 때, 조건 q는 조건 p이기 위한 (가) 조건이고, 조건 $\sim p$는 조건 $\sim q$이기 위한 (나) 조건이다. (가), (나)에 각각 알맞은 것은?

① 필요, 필요
② 충분, 충분
③ 필요, 충분
④ 충분, 필요
⑤ 필요충분, 충분

해설

p가 q이기 위한 충분조건 : $p \Rightarrow q$
(가) : $p \Rightarrow q$ 이면 q는 p이기 위한 필요조건
(나) : $p \Rightarrow q$ 이면 그 대우 $\sim q \Rightarrow \sim p$ $\therefore \sim p$는 $\sim q$이기 위한 필요조건

7. $x-1=0$이 $2x^2+ax-1=0$이기 위한 충분조건일 때 상수 a 의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x-1=0$이면 $2x^2+ax-1=0$이 참이므로
$x=1$을 대입하면 $2+a-1=0$
$\therefore a=-1$

8. 다음 빈 칸에 알맞은 말을 써 넣어라.

$A \cap B = A$ 인 것은 $A \subset B$ 이기 위한 $\boxed{}$ 조건이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 필요충분

해설

$A \cap B = A$ 인 것이 곧, $A \subset B$ 을 의미하므로 명제와 역 모두 참이 되는 필요충분조건이다.

9. 조건 $x < 1$ 또는 $x > 2$ 의 부정은?

① $x < 1$ 그리고 $x > 2$
② $x \leq 1$ 또는 $x \geq 2$
③ $x \geq 1$ 또는 $x \leq 2$
④ $x \leq 1$ 그리고 $x \geq 2$
⑤ $1 \leq x \leq 2$

해설

$x < 1$ 또는 $x > 2$ 의 부정은 $1 \leq x \leq 2$ 이다.

10. 다음 중 '모든 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있다.'의 부정인 명제를 고르면?

① 평화시에 살고 있지 않으면 평화고등학교 학생이 아니다.
② 평화시에 사는 학생은 평화고등학교 학생이다.
③ 모든 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있지 않다.
④ 평화시에 살고 있지 않은 평화고등학교 학생이 적어도 한명은 있다.
⑤ 어떤 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있다.

해설

모든 ~ 이다. : (부정) ⇒ 어떤 ~ 아니다.
적어도 ~ 아니다.

11. 명제「$x = 1$ 이면 $x^2 + 4x - 5 = 0$ 이다.」의 역, 이, 대우 중에서 참인 것을 모두 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 대우

해설

주어진 명제가 참이므로 대우가 참이고, 역은 거짓이므로 이도 거짓이다.
(역의 반례 : $x = -5$)

12. 두 명제 '겨울이 오면 춥다.' '눈이 오지 않으면 춥지 않다.'가 모두 참이라고 할 때, 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 말할 수 <u>없는</u> 것은?

① 추우면 눈이 온다.

② 눈이 오면 겨울이 온다.

③ 눈이 오지 않으면 겨울이 오지 않는다.

④ 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.

⑤ 겨울이 오면 눈이 온다.

해설

명제가 참이면 대우도 참이다. 겨울이 오면 춥다. ↔ 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.
눈이 오지 않으면 춥지 않다. ↔ 추우면 눈이 온다. ⇒ 겨울이 오면 눈이 온다.
②에서 '눈이 오면 겨울이 온다'는 참, 거짓을 판별할 수 없다.

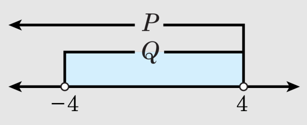
13. $x < 4$는 $-4 < x < 4$ 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : ____ 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$p : x < 4,\ q\ :\ -4 < x < 4$ 라고 하면



$\therefore Q \subset P$

14. 다음 (가), (나) 에 들어갈 말을 알맞게 나열한 것은?

- $|a| = |b|$ 는 $a = b$ 이기 위한 (가) 조건이다.
- 3의 배수는 6의 배수이기 위한 (나) 조건이다.

① 필요, 필요　　② 필요, 충분

③ 충분, 충분　　④ 충분, 필요

⑤ 충분, 필요충분

해설

$|a| = |b| \;\; \underset{\overset{\circ}{\longleftarrow}}{\overset{\times}{\longrightarrow}} \;\; a = b$ ∴ 필요

$\{x \mid x$는 3의 배수$\} \supset \{x \mid x$는 6의 배수$\}$ ∴ 필요

15. p_n 이 다음과 같을 때, $f(p_n) = 1$ (p_n이 명제이면) $f(p_n) = -1$ (p_n이 명제가 아니면) 로 정의한다. 이 때, $f(p_1)+f(p_2)+f(p_3)$ 의 값을 구하면? (단, $n = 1, 2, 3$)

$p_1 : x^2 - x - 2 = 0$ p_2 : 16의 양의 약수는 모두 짝수이다. p_3 : $\sqrt{3}$ 은 유리수이다.

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$$f(p_n) = \begin{cases} 1 \ (p_n\text{이 명제이다.}) \\ -1 \ (p_n\text{이 명제가 아니다.}) \end{cases}$$

p_1 : $x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow$ 명제가 아니다.($\because$ x 값에 따라 참 일수도 거짓일수도 있다.)

p_2 : 거짓, p_3 : 거짓 $\rightarrow$ 모두 거짓인 명제이다.

$\therefore$ $f(p_1)+f(p_2)+f(p_3) = (-1)+1+1 = 1$

16. 두 조건 p : x 는 홀수, q : x 는 10 이하의 소수에 대하여 ‘p 또는 $\sim q$ ’ 의 부정을 만족하는 것은? (단, x 는 자연수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 7 ⑤ 8

해설

‘$\sim(p$ 또는 $\sim q)$’ 는 ‘$\sim p$ 이고 q ’ 에서 $\sim p$: x 는 짝수, q : x 는 10 이하의 소수
따라서, ‘x 는 짝수’ 이고 ‘x 는 10 이하의 소수’ 를 만족하는 것은 2 이다

17. $p(x) : x > 0,\ q(x) : x < 1$ 일 때, '$p(x)$ 이고 $q(x)$ ' 의 진리집합을 바르게 구한 것은?

① $\{x \mid x > 0\}$
② $\{x \mid 0 < x < 1\}$
③ $\{x \mid x > 1\}$
④ $\{x \mid x < 0$ 또는 $x > 1\}$
⑤ $\{x \mid x < 1\}$

해설

$p(x) : x > 0,\ q(x) : x < 1$ 이므로 $p(x)$ 이고 $q(x)$ 이면 $x > 0$ 이고 $x < 1$ 이다.
즉, $\{x \mid 0 < x < 1\}$

18. 다음 명제의 참, 거짓을 써라. (단, x, y 는 실수)
'$xy \neq 0$ 이면 $x \neq 0$ 또는 $y \neq 0$ 이다.'

▶ 답 :

▷ 정답 : 참

해설

대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.
대우 : $x = 0,\ y = 0 \ \Rightarrow \ xy = 0$ (참)

19. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하고, $P \cup Q = P$ 일 때, 다음 중 참인 명제는?

① $p \to q$ ② $q \to p$ ③ $\sim p \to q$
④ $q \to \sim p$ ⑤ $\sim q \to \sim p$

해설

$P \cup Q = P$ 이므로 $Q \subset P$ 이다. 따라서, $q \Rightarrow p$

20. 전체집합 U에 대하여 두 조건 p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 할 때, $P \cup (Q - P) = Q$이다. 다음 명제 중 반드시 참인 것은?

① $\sim p \rightarrow q$　② $q \rightarrow p$　③ $q \rightarrow \sim p$

④ $\sim q \rightarrow \sim p$　⑤ $\sim p \rightarrow \sim q$

해설

$P \cup (Q - P) = P \cup (Q \cap P^C)$ (차집합의 성질)
$= (P \cup Q) \cap (P \cup P^c)$ (분배법칙)
$= (P \cup Q) \cap U$
$= P \cup Q = Q$ 이므로 $P \subset Q$
$P \subset Q$ 이면 $Q^c \subset P^c$ 이므로 $\sim q \rightarrow \sim p$ 가 참

해설

$P \subset Q$ 이면 $p \rightarrow q$ 가 참이고 그 대우인 $\sim q \rightarrow \sim p$ 도 참이다.

21. 전체집합을 $U=\{-1,\ 0,\ 1\}$이라 할 때, 전체집합 U에 대하여 다음 중 참인 명제는?

① 모든 x에 대하여 $x^2>1$이다.

② 임의의 x, y에 대하여 $x+y\le 1$이다.

③ 어떠한 x에 대하여도 $x^2+2x\ge -1$ 이다.

④ 적당한 x, y에 대하여 $x^2-y^2>1$이다.

⑤ $x^2+x<x^3$ 인 x가 존재한다.

해설

① 반례 : $x=0$ 일 때 $x^2=0$ 이므로 주어진 명제 는 거짓이다.
② 반례 : $x=y=1$ 일 때 $x+y=2\ge 1$ 이므로 주 어진 명제는 거짓이다.
③ 모든 x 에 대하여 $x^2+2x+1=(x+1)^2\ge 0$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
④ 모든 x, y 에 대하여 $x^2-y^2\le 1$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.
⑤ 모든 x 에 대하여 $x^2+x\ge x^3$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.

22. n 이 100보다 작은 자연수일 때, 다음 명제가 거짓임을 보여주는 반례는 모두 몇 가지인가?

'n^2 이 12의 배수이면 n 은 12의 배수이다.'

▶ 답: ______ 가지

▷ 정답: 8가지

해설

명제가 거짓임을 보이는 반례는 n^2 이 12의 배수이면서 n 이 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다. 즉, n 은 6의 배수이면서 12의 배수가 아닌 수를 찾으면 된다.

$n \in \{6 \times 1,\ 6 \times 3,\ 6 \times 5,\ 6 \times 7,\ 6 \times 9,\ 6 \times 11,\ 6 \times 13,\ 6 \times 15\}$

23. 두 조건 $p : |x-2| \le h$, $q : |x+1| \le 7$에 대하여 'p이면 q이다.'가 참이 되도록 하는 h의 최댓값을 구하여라. (단, $h \ge 0$)

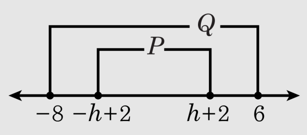
▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

p : $2-h \le x \le 2+h$

q : $-8 \le x \le 6$



$-h+2 \ge -8 \leftrightarrow h \le 10$, $h+2 \le 6 \leftrightarrow h \le 4$

$\therefore h \le 4$

$\therefore n$의 최댓값은 4

24. 명제 ‘모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 4 \geq k$ 이다.’ 는 참이고, ‘어떤 실수 x 에 대하여 $x^2 + k \leq 1$ 이다.’ 는 거짓일 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-4 \leq k \leq -1$ ② $1 \leq k \leq 4$ ③ $-1 \leq k < 1$

④ $1 < k \leq 4$ ⑤ $-4 \leq k \leq 1$

해설

모든 실수 x 에 대하여 $x^2 + 4 \geq k$ 가 참이므로 $k \leq 4$

어떤 실수 x 에 대하여 $x^2 + k \leq 1$ 이 거짓이므로 $k > 1$

$\therefore\ 1 < k \leq 4$

25. 다음 명제 중 그 대우가 참인 것을 <u>모두</u> 고르면?

① 마름모이면 정사각형이다.

② $a < b$ 이면 $|a| < |b|$ 이다.

③ $A \cup B = A$ 이면 $B \subset A$ 이다

④ $ab = 0$ 이면 $a^2 + b^2 = 0$ 이다.

⑤ $x - 1 = 0$ 이면 $x^2 - 1 = 0$ 이다.

해설

대우가 참이면 주어진 명제도 참이므로 참인 명제를 고르면 된다.

① (반례) □ABCD 에서 네 변의 길이가 같고 $\angle A = \angle C = 100°$, $\angle B = \angle D = 80°$ 일 때, □ABCD 는 마름모이지만 정사각형이 아니므로 거짓이다.

② (반례) $a = -3, b = 1$ 일 때, $a < b$ 이지만 $|a| > |b|$ 이므로 거짓이다.

④ (반례) $a = 0, b = 1$ 일 때, $ab = 0$ 이지만 $a^2 + b^2 \neq 0$ 이므로 거짓이다.

26. 두 조건 $p : x-2 \neq 0$, $q : x^2-ax+2 \neq 0$에서 $q \rightarrow p$가 참일 때, a의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$q \Rightarrow p$가 참이면, 대우인 $\sim p \Rightarrow \sim q$ 도 참이다.
$x-2=0 \Rightarrow x^2-ax+2=0 \therefore a=3$

27. 두 조건 $p : x^2 - ax - 6 > 0$, $q : x^2 + 2x - 3 \neq 0$에 대하여 $p \to q$가 참일 때 a의 최댓값, 최솟값의 합은?

① -7　② -6　③ -5　④ -4　⑤ -3

해설

$p \to q$는 $\sim q \to \sim p$와 동치임을 이용

$\therefore x^2 + 2x - 3 = 0$이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$이다.

$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) = 0$,

$x = -3,\ 1$이면 $x^2 - ax - 6 \leq 0$이다.

1) $x = -3\ : 9 + 3a - 6 \leq 0 \ \to \ a \leq -1$

2) $x = 1\ : 1 - a - 6 \leq 0 \ \to \ a \geq -5$

$\therefore\ -5 \leq a \leq -1$

따라서, $-5 + (-1) = -6$

28. 명제 $p \rightarrow q$가 참일 때, $p \Rightarrow q$로 나타내기로 한다. 명제 p, q, r, s가 다음의 조건을 만족할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

㉠ $p \Rightarrow q$	㉡ $\sim r \Rightarrow \sim q$
㉢ $s \Rightarrow p$	㉣ $\sim s \Rightarrow \sim q$

① $s \Rightarrow p$ ② $p \Rightarrow r$ ③ $r \Rightarrow s$
④ $q \Rightarrow p$ ⑤ $p \Rightarrow s$

해설

네 명제 p, q, r, s를 정리하면
$p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, s \Rightarrow p, q \Rightarrow s$
즉, $p \Rightarrow q \Rightarrow r, p \Rightarrow q \Rightarrow s$ 이므로
옳지 않은 것은 ③ 이다.

29. 다음은 명제 「$a,\ b,\ c$가 양의 정수일 때, $a^2+b^2=c^2$이면 $a,\ b,\ c$중 적어도 하나는 짝수이다.」의 증명이다.

증명

주어진 명제의 대우는 「$a,\ b,\ c$가 양의 정수일 때, $a,\ b,\ c$가 (가)이면 $a^2+b^2 \neq c^2$ 이다.」$a,\ b,\ c$ 가 (가)이면, $a^2,\ b^2,\ c^2$ 은 모두 홀수이므로 a^2+b^2 은 (나), c^2 은 (다)가 되어 $a^2+b^2 \neq c^2$ 이다.
따라서, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① 적어도 하나는 홀수, 홀수, 짝수

② 적어도 하나는 홀수, 짝수, 홀수

③ 모두 홀수, 홀수, 짝수

④ 모두 홀수, 짝수, 홀수

⑤ 모두 짝수, 홀수, 짝수

해설

'$a,\ b,\ c$중 적어도 하나는 짝수이다.'의 부정은 '$a,\ b,\ c$ 모두 홀수이다.' 따라서 주어진 명제의 대우는 「$a,\ b,\ c$ 가 양의 정수일 때, $a,\ b,\ c$ 가 (모두 홀수)이면 $a^2+b^2 \neq c^2$ 이다.」$a,\ b,\ c$ 가 모두 홀수이면 $a^2,\ b^2,\ c^2$ 은 모두 홀수 a^2+b^2 은 (홀수)+(홀수)로 (짝수), c^2 은 (홀수)이므로 $a^2+b^2 \neq c^2$

30. 두 조건 $p : |x-1| = 2$, $q : x^2 + 2x + 1 = 0$ 에서 p 는 q 이기 위한 어떤 조건인지 구하여라.

▶ 답: ________ 조건

▷ 정답: 필요조건

해설

주어진 조건의 진리집합이
$P = \{-1, 3\}$, $Q = \{-1\}$ 이므로 $Q \subset P$

31. 다음 (   )에 『필요, 충분, 필요충분』 중에서 알맞은 것을 차례대로 써 넣어라.

$x = 2$ 는 $x^2 = 4$ 이기 위한 (   )조건이다 평행사변형은 직사각형이기 위한 (   )조건이다.

▶ 답 : ____________ 조건

▶ 답 : ____________ 조건

▷ 정답 : 충분조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$x = 2$ 는 $x^2 = 4$ 이기 위한 충분 조건이다. 평행사변형은 직사각형이기 위한 필요 조건이다.

32. 다음 조건p 는 조건q 이기 위한 어떤 조건인지 구하여라.(단,a,b 는 실수)

(i) p : a,b 는 유리수, q : $a+b,ab$ 는 유리수 (ii) p : x 는 3의 배수 , q : x 는 6의 배수

▶ 답 : ______ 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

33. 두 집합 A, B에 대하여 두 조건 p, q는 $p : (A \cup B) - (A \cap B) = \varnothing \quad q : [\quad]$ 이고, p 가 q이기 위한 필요충분조건일 때, [ ]의 내용으로 알맞은 것은?

① $A = \varnothing$　　② $A = B$　　③ $A \subset B$

④ $B \subset A$　　⑤ $B = \varnothing$

해설

$(A \cup B) - (A \cap B) = \varnothing$이 성립하려면, $(A \cup B) \subset (A \cap B)$ 즉, $A = B$ 일 때이다.

34. 다음 두 조건 $p : |x-2| \le h,\ q : |x+2| \le 12$ 에 대하여 p 가 q 이기 위한 충분조건이 되도록 하는 h 의 최댓값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

$p : 2-h \le x \le 2+h,\ q : -14 \le x \le 10$

$-14 \le 2-h \quad \rightarrow \quad h \le 16$

$2+h \le 10 \quad \rightarrow \quad h \le 8$

35. $a \le x \le 6$은 $2 \le x \le 5$이기 위한 필요조건이고, $b \le x \le 4$은 $2 \le x \le 5$이기 위한 충분조건일 때 a의 최댓값과 b의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\{x|2 \le x \le 5\} \subset \{x|a \le x \le 6\}$

$\therefore a \le 2$

$\{x|b \le x \le 4\} \subset \{x|2 \le x \le 5\}$

$\therefore 2 \le b$

a의 최댓값은 2, b의 최솟값은 2

$\therefore 2 + 2 = 4$

36. $p : -1 \leq x \leq 1$ 또는 $x \geq 3$, $q : x \geq a$ 에 대하여 q 는 p 이기 위한 필요조건일 때, 정수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
q 는 p 이기 위한 필요조건이므로 $P \subset Q$ 이다.
$\therefore\ a \leq -1$
따라서 a 의 최댓값은 -1 이다.

37. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A-B)\cup(B-A)=U$ 이 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A=B$　② $B\subset A$　③ $A\subset B$

④ $A\cap B=\varnothing$　⑤ $A^C=B$

해설

좌변의 집합이 나타내는 부분은 A, B 의 합집합에서 교집합을 뺀 부분의 원소들을 나타낸다.
그런데, 그 부분이 전체집합이 되어야 하므로 A 와 B 의 교집합은 없으면서, A 와 B 의 합집합이 전체집합이 되는 꼴이 나타나야 한다.
따라서, 이를 만족하는 것은 ④, ⑤인데, 여기에서 ④번은 필요조건에 성립되지 않으므로 답은 ⑤번이 된다.

38. 전체집합 $U = \{x \mid x\text{는 10 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 P, Q 가 조건 p, q를 만족하는 집합이라고 하자. 조건 p가 'x는 소수' 이고 p가 q이기 위한 필요조건일 때, 집합 Q의 원소가 될 수 없는 것은?

① 2　　② 3　　③ 5　　④ 7　　⑤ 9

해설

$U = \{1, 2, 3, \cdots, 9, 10\}$, $P \subset U$, $Q \subset U$이고 조건 p가 'x는 소수' 이므로 $P = \{2, 3, 5, 7\}$
p가 q이기 위한 필요조건이므로 $Q \subset P$
따라서, 집합 P의 원소가 아닌 것은 집합 Q의 원소가 될 수 없다.

39. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라고 하자. 이때, 다음 식을 만족시키는 조건 p 는 q 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

$$\{(P \cap Q) \cup (P \cap Q^c)\} \cap Q = P$$

▶ 답: ________ 조건

▷ 정답: 충분조건

해설

$\{(P \cap Q) \cup (P \cap Q^c)\} \cap Q = P$

$\{P \cap (Q \cup Q^c)\} \cap Q = P$

$(P \cap U) \cap Q = P$

$P \cap Q = P$

$P \subset Q$

$\therefore\ p \Rightarrow q$

따라서, p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

40. 전체집합 U 에 대하여 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, $P \cup (Q - P) = P$ 인 관계가 성립한다면 q 는 p 이기 위한 무슨 조건인가?

① p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

② q 는 p 이기 위한 충분조건이다.

③ p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

④ q 는 p 이기 위한 필요조건이다.

⑤ q 는 p 이기 위한 필요충분조건이다.

해설

$$\begin{aligned} P \cup (Q - P) &= P \cup (Q \cap P^c) \\ &= (P \cup Q) \cap (P \cup P^c) \\ &= (P \cup Q) \cap U \\ &= P \cup Q \end{aligned}$$

에서 $P \cup Q = P$ 이므로 $Q \subset P$

따라서, q 는 p 이기 위한 충분조건이다.

41. 세 조건 p, q, r에 대하여 q는 p의 필요조건, q는 r의 충분조건이고 r는 p의 충분조건이다. 이 때, p는 r이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 조건

▷ 정답 : 필요충분조건

해설

q는 p의 필요조건이므로 $p \Rightarrow q$ $\cdots\cdots$ ㉠
q는 r의 충분조건이므로 $q \Rightarrow r$ $\cdots\cdots$ ㉡
r는 p의 충분조건이므로 $r \Rightarrow p$ $\cdots\cdots$ ㉢
㉠ , ㉡ 에서 $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$이므로
$p \Rightarrow r$ $\cdots\cdots$ ㉣
㉢, ㉣에서 $r \Rightarrow p$, $p \Rightarrow r$이므로 $r \leftrightarrow p$이다.
$\therefore$ 필요충분조건

42. 네 조건 $p,\ q,\ r,\ s$ 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, q 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 충분조건, r 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이때, p 는 s 이기 위한 어떤 조건인지 써라.

▶ 답: ________________ 조건

▷ 정답: 필요조건

해설

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $q \Rightarrow p$
q 는 r 이기 위한 필요조건이므로 $r \Rightarrow q$
q 는 s 이기 위한 충분조건이므로 $q \Rightarrow s$
r 는 s 이기 위한 필요조건이므로 $s \Rightarrow r$
$s \Rightarrow r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 에서 $s \Rightarrow p$
그러나 $p \Rightarrow s$ 인지는 알 수 없다.
$\therefore$ p 는 s 이기 위한 필요조건이다.

43. 자연수 n에 대하여 $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$로 정의된다. 예를 들어, $1! = 1,\ 2! = 2 \times 1,\ 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ 이다. 전체집합 $U = \{x \mid x = n!\ (n,\ x$는 자연수$)\}$에서 두 조건 p, q가 각각 p : 일의 자리가 0인수, q : 자리수가 네 자리 이상인 수 일 때, 조건 'p 이고 $\sim q$'를 만족하는 집합의 원소의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

'p이고 $\sim q$' $\Rightarrow \quad P \cap Q^c = P - Q$

ⅰ) 일의 자리가 0인 수 중 네자리 미만인 수의 일의 자리가 0이기 위해서는 인수로 2, 5 를 가져야 한다.

$5! = \underline{5} \times 4 \times 3 \times \underline{2} \times 1 = 120$

ⅱ) $6! = 6 \times \underline{5} \times 4 \times 3 \times \underline{2} \times 1 = 720$

44. 두 조건 p, q가 $p\ :|x|<a$, $q\ :|x-1|\geq 3$과 같이 주어져 있다. 명제 $\sim p \rightarrow q$가 참일 때, 양수 a의 범위를 구하면?

① $0<a\leq 4$　② $a>4$　③ $a\geq 4$
④ $a>2$　⑤ $2\leq a\leq 4$

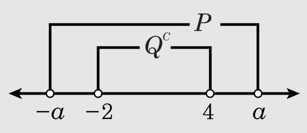
해설

$\sim p \rightarrow q \Rightarrow \ \sim q \ \rightarrow \ p \Rightarrow Q^c \subset P$

$P=\{x|-a<x<a\}$

$Q=\{x|x\leq -2$ 또는 $x\geq 4\}$

$Q^c=\{x|-2<x<4\}$



$-a\leq -2 \rightarrow a\geq 2$, $a\geq 4$

$\therefore a\geq 4$

45. 두 명제「겨울이 오면 춥다.」, 「추우면 눈이 온다.」가 모두 참이라고 할 때, 다음 명제 중에서 반드시 참이라고 말할 수 <u>없는</u> 것은 ?

① 눈이 오지 않으면 춥지 않다.

② 춥지 않으면 겨울이 오지 않는다.

③ 겨울이 오면 눈이 온다.

④ 눈이 오면 겨울이 온다.

⑤ 눈이 오지 않으면 겨울이 오지 않는다.

해설

p : 겨울이 온다. q : 춥다. r : 눈이 온다.
라 하면 $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$ 이다.
① $q \Rightarrow r$ 이므로 $\sim r \Rightarrow \sim q$ (대우 명제)
② $p \Rightarrow q$ 이므로 $\sim q \Rightarrow \sim p$ (대우 명제)
③ $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$ 이므로
$p \Rightarrow r$ (삼단논법)
④ $p \Rightarrow r$ 이라 해서 반드시 $r \Rightarrow p$ 인 것은 아니다.
⑤ $p \Rightarrow r$ 이므로 $\sim r \Rightarrow \sim p$ (대우명제)

46. 한쪽 면에는 숫자, 다른 쪽 면에는 영문자가 쓰여진 카드가 다음 규칙을 만족한다. '카드의 한쪽 면에 홀수가 적혀 있으면 다른 쪽 면에는 자음이 적혀 있다.' 탁자 위에 그림과 같이 놓인 카드 4장이 위 규칙에 맞는 카드인지 알기 위해 다른 쪽 면을 반드시 확인해야할 필요가 있는 것은?

2	7	k	u

① | 7 | u |

② | 7 | k |

③ | 2 | u |

④ | 2 | k |

⑤ | 2 | 7 | k | u |

해설

주어진 규칙의 대우는 '한 쪽 면에 모음이 적혀 있으면 다른 쪽 면에는 짝수가 적혀있다.' 이다. 따라서 홀수가 적혀있는 카드와 모음이 적혀 있는 카드만 확인하면 된다.

47. 다음은 실수 x, y 에 대하여 「$x^2 + y^2 = 1$ 이면 $x \le 1$ 또는 $y \le 1$ 이다」가 참임을 증명한 것이다. 다음 (가), (나), (다) 에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은?

주어진 명제 '$x^2+y^2=1$ 이면 $x \le 1$ 또는 $y \le 1$ 이다' 의 대우인 '(가) 이면 $x^2+y^2 \ne 1$ 이다' 가 참임을 증명하면 된다. (가) 에서 $x^2+y^2 >$ (나) 이므로 $x^2+y^2 \ne 1$ 가 성립한다. 따라서 대우가 참이므로 주어진 명제도 (다) 이다.

① $x > 1$ 이고 $y > 1$, 1 , 참
② $x > 1$ 이고 $y > 1$, 2 , 참
③ $x > 1$ 또는 $y > 1$, 2 , 참
④ $x \ge 1$ 또는 $y \ge 1$, 1 , 거짓
⑤ $x \ge 1$ 이고 $y \ge 1$, 2 , 거짓

해설

$x \le 1$ 또는 $y \le 1$ 의 부정은 $x > 1$ 이고 $y > 1$ 이다.
x, y 가 모두 1 보다 크므로 x 의 제곱수와 y 의 제곱수를 더한 값은 무조건 2 보다 크게 된다.
또한, 대우가 참이므로 주어진 명제도 참이 된다.

48. 다음은 a, b 가 실수일 때, 보기 중에서 서로 동치인 것끼리 짝지어 놓은 것이다. 옳지 않은 것은?

보기

㉠ $ab = 0$	㉡ $a^2 + b^2 = 0$
㉢ $a^2 + b^2 > 0$	㉣ $a = 0$ 이고 $b = 0$
㉤ $a = 0$ 또는 $b = 0$	㉥ $a = 0$ 이고 $b \neq 0$
㉦ $a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$	㉧ $ab = 0$ 이고 $b \neq 0$
㉨ $a \neq 0$ 이고 $b \neq 0$	

① ㉠과 ㉤ ② ㉡와 ㉣ ③ ㉢과 ㉦

④ ㉥와 ㉧ ⑤ ㉢과 ㉨

해설

$ab \leftrightarrow a = 0$ 또는 $b = 0$

$a^2 + b^2 \leftrightarrow a = 0$ 이고 $b = 0$

$a^2 + b^2 > 0 \leftrightarrow a \neq 0$ 또는 $b \neq 0$

$ab = 0$ 이고 $b \neq 0 \leftrightarrow a = 0$ 이고 $b \neq 0$

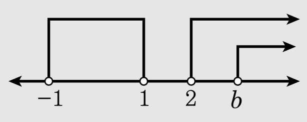
49. $-1 < x < 1$ 또는 $x > 2$ 이 되기 위한 $x > a$은 필요조건이고 $x > b$는 충분조건일 때 a 의 최댓값과 b의 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

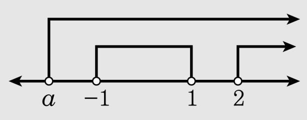
해설

$x > b$ 은 $-1 < x < 1$ 또는 $x > 2$ 이 되기 위한 충분조건에서



$\therefore b \geq 2$

$x > a$ 은 $-1 < x < 1$ 또는 $x > 2$ 이 되기 위한 필요조건에서



$\therefore a \leq -1$

$\therefore a$ 의 최댓값 : -1, b 의 최솟값 : 2

따라서 $(-1) + 2 = 1$

50. 세 조건 p, q, r 에 대하여 $\sim p \Rightarrow q$, $r \Rightarrow \sim q$ 일 때, 조건 p 가 r 이기 위한 필요충분조건이려면 다음 중 어떤 조건이 더 필요한가?

① $p \Rightarrow q$　② $q \Rightarrow r$　③ $p \Rightarrow r$
④ $\sim q \Rightarrow p$　⑤ $\sim r \Rightarrow p$

해설

$r \Rightarrow \sim q$ 이므로 $q \Rightarrow \sim r$
$\sim p \Rightarrow q$ 이고 $q \Rightarrow \sim r$ 이므로 삼단논법에 의하여 $\sim p \Rightarrow \sim r$
$\therefore\ r \Rightarrow p$
따라서, $p \Leftrightarrow r$가 되려면 $r \Rightarrow p$ 이외에 $p \Rightarrow r$ 가 더 필요하다.