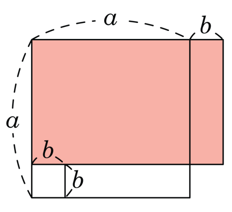
1. 다음 그림에서 색칠한 부분이 나타내고 있는 곱셈공식은 무엇인가?



① $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

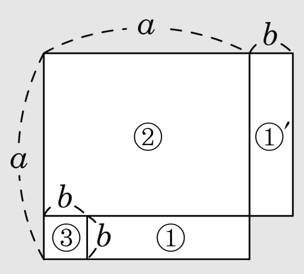
② $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

③ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

④ $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

⑤ $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

해설



$(a+b)(a-b) =$ ①′ + ②

①′ = ① 이므로

$(a+b)(a-b) =$ ① + ② $= a^2 - b^2$

$\therefore\ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

2. $2 \le x \le 5,\ 1 \le y \le a$일 때, $x+y$의 범위가 xy의 범위 안에 포함되기 위한 실수 a의 최솟값은? (단, $a \ge 1$)

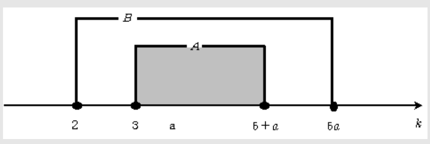
① 1　② $\frac{8}{7}$　③ $\frac{7}{6}$　④ $\frac{5}{4}$　⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$3 \le x+y \le 5+a,\ 2 \le xy \le 5a$이므로

$3 \le x+y \le 5+a,$

이때 $x+y$의 범위가 xy의 범위 안에 포함되려면 다음 수직선에서



$5+a \le 5a$ 이어야 하므로 $4a \ge 5$

$\therefore a \ge \frac{5}{4}$

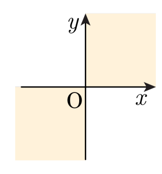
3. 점 $(2,\ 1)$을 지나고 직선 $x-2y+1=0$에 수직인 직선의 식을 구하면?

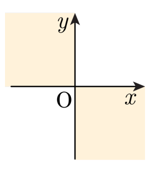
① $y=2x+5$ ② $y=-2x+5$ ③ $y=2x-5$
④ $y=5x+2$ ⑤ $y=5x-2$

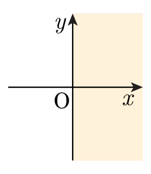
해설

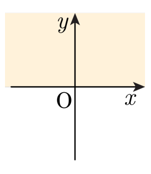
$x-2y+1=0 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$
이 직선에 수직하므로 기울기는 -2
$y-1=-2(x-2)$
$\therefore\ y=-2x+5$

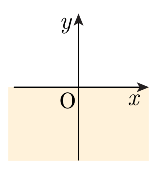
4. 부등식 $xy > 0$ 이 나타내는 영역을 좌표평면 위에 바르게 나타낸 것은? (단, 경계는 포함하지 않는다.)

①


②


③


④


⑤


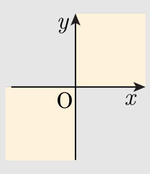
해설

$xy > 0$

ⅰ) $x > 0$, $y > 0$ 일 때, 제 1 사분면을 나타낸다.

ⅱ) $x < 0$, $y < 0$ 일 때, 제 3 사분면을 나타낸다.

ⅰ), ⅱ) 에 의해서 아래 그림이 구하는 영역이다. (단, 경계는 포함하지 않는다.)



5. 다항식 $f(x)$를 $x-\frac{1}{2}$으로 나눌 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라고 할 때, $f(x)$를 $2x-1$으로 나눌 때의 몫과 나머지는?

① 몫 : $2Q(x)$ 나머지 : $\frac{1}{2}R$
② 몫 : $2Q(x)$ 나머지 : R
③ 몫 : $\frac{1}{2}Q(x)$ 나머지 : $\frac{1}{2}R$
④ 몫 : $\frac{1}{2}Q(x)$ 나머지 : R
⑤ 몫 : $\frac{1}{2}Q(x)$ 나머지 : $2R$

해설

$x-\frac{1}{2}$에 2를 곱하면 $2x-1$

$$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x)+R=(2x-1)\frac{1}{2}Q(x)+R$$

6. 최소공배수가 x^3-3x+2이고, 최대공약수가 $x-1$일 때, 이차항의 계수가 1인 두 다항식의 합을 구하면?

① $2x^2+x-1$ ② $2x^2-x-1$ ③ $2x^2-x+1$
④ x^2-x-2 ⑤ x^2-x+2

해설

$L=abG,\ G=x-1$에서
$L=(x-1)^2(x+2)$
$A=(x-1)^2,\ B=(x-1)(x+2)$
$A+B=(x^2-2x+1)+(x^2+x-2)$
$=2x^2-x-1$

7. $a > 0,\ b > 0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$이고, $a < 0,\ b < 0$일 때, $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$이다. 이러한 성질을 이용하여 이차방정식 $x^2 + 3x + 1 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

$\alpha + \beta = -3,\ \alpha\beta = 1$

$\therefore \alpha < 0,\ \beta < 0$

$\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = -\sqrt{\alpha\beta}$

$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = (\alpha + \beta) + 2\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$

$= (\alpha + \beta) - 2 \cdot \sqrt{\alpha\beta} = -3 - 2 \cdot 1 = -5$

8. 이차함수 $y = x^2 + ax + 2a$ 의 그래프는 x 축과 두 점 A, B 에서 만나고 $\overline{\mathrm{AB}} = 2$ 일 때, 모든 실수 a 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$\mathrm{A}(\alpha,\ 0),\ \mathrm{B}(\beta,\ 0)(\alpha < \beta)$ 이라 하면
α, β 는 이차방정식 $x^2 + ax + 2a = 0$ 의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha + \beta = -a,\ \alpha\beta = 2a \quad \cdots$ ㉠
이 때, $\overline{\mathrm{AB}} = 2$ 이므로
$\beta - \alpha = 2$ 양변을 제곱하면
$(\beta - \alpha)^2 = 4$
$(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 4 \quad \cdots$ ㉡
㉠을 ㉡에 대입하여 정리하면 $a^2 - 8a - 4 = 0$
따라서 모든 실수 a 의 값의 합은 8 이다

9. 정의역이 $\{x \mid 0 \le x \le 3\}$ 인 이차함수 $y = ax^2 - 4ax + 4a + 3$ 의 최솟값이 -1 이다. 이 함수의 그래프가 점 $(1, b)$ 를 지날 때, 상수 a, b 의 값을 구하면?

① $a = -1,\ b = -2$ ② $a = 1,\ b = 2$

③ $a = -1,\ b = 2$ ④ $a = 1,\ b = -2$

⑤ $a = -2,\ b = 2$

해설

$y = ax^2 - 4ax + 4a + 3$
$= a(x-2)^2 + 3\ (0 \le x \le 3)$ 이므로
$x = 0$ 일 때 최솟값은 -1 을 갖는다.
$-1 = 4a + 3$
$\therefore a = -1$
점 $(1,\ b)$ 를 지나므로
$\therefore b = a + 3 = 2$

10. 방정식 $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ 의 해를 구하여라.

▶ 답：

▶ 답：

▶ 답：

▷ 정답： $x = 1$

▷ 정답： $x = 2$

▷ 정답： $x = 3$

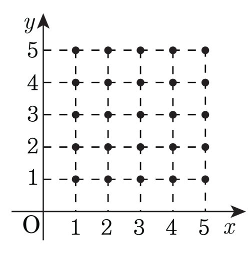
해설

$f(1) = 1^3 - 6 \times 1^2 + 11 \times 1 - 6 = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x - 1$ 을 인수로 갖는다.
따라서 $f(x)$ 를 $x - 1$ 로 나눈 몫을 다음 조립제법으로 구한다.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -6 & 11 & -6 \\ & & 1 & -5 & 6 \\ \hline & 1 & -4 & 5 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore\ f(x) = (x-1)(x^2 - 5x + 6) = (x-1)(x-2)(x-3) = 0$
$\therefore\ x = 1$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 3$

11. 다음 그림의 격자점 중 $xy+x-2y-2=3$을 만족시키는 점은 모두 몇 개인가?



① 0 개　　② 1 개　　③ 2 개

④ 3 개　　⑤ 4 개

해설

$$\begin{aligned} xy+x-2y-2 &= x(y+1)-2(y+1) \\ &= (x-2)(y+1) \end{aligned}$$ 이므로

$(x-2)(y+1)=3$ 에서 문제의 $x,\ y$ 는

ⅰ) $x-2=1,\ y+1=3$ 일 때, $x=3,\ y=2$

ⅱ) $x-2=3,\ y+1=1$ 일 때, $x=5,\ y=0$

ⅲ) $x-2=-1,\ y+1=-3$ 일 때, $x=1,\ y=-4$

ⅳ) $x-2=-3,\ y+1=-1$ 일 때,
$x=-1,\ y=-2$

$x,\ y$는 자연수이므로 조건을 만족시키는 점은 $(3,\ 2)$ 뿐이다.

12. $a,\ b$는 0이 아닌 실수이고, $a < b$라고 할 때, 다음 중에서 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면?

보기

㈎ $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$	㈏ $\lvert a\rvert < \lvert b\rvert$
㈐ $a^2 < b^2$	㈑ $a^3 < b^3$

① (가), (나)　　② (가), (나), (다)

③ (나), (다)　　④ (다)

⑤ (라)

해설

$a = -2,\ b = 1$이라고 하면

$\frac{1}{a} = -\frac{1}{2},\ \frac{1}{b} = 1$

$\lvert a\rvert = 2, \lvert b\rvert = 1 a^2 = (-2)^2 = 4,\ b^2 = 1$

따라서 (가), (나), (다)는 거짓이다.

$a < b$이면 $a^3 < b^3$가 항상 성립한다.

13. 다음 부등식을 만족하는 정수 x의 개수를 구하면?

$$2|x+2|+|x-1| \le 6$$

① 4 개　② 5 개　③ 6 개　④ 7 개　⑤ 8 개

해설

i) $x < -2$일 때
$-2(x+2)-(x-1) \le 6$,　$x \ge -3$
공통부분은 $-3 \le x < -2$

ii) $-2 \le x < 1$일 때
$2(x+2)-(x-1) \le 6$,　$x \le 1$
공통부분은 $-2 \le x < 1$

iii) $x \ge 1$일 때
$2(x+2)+(x-1) \le 6$,　$x \le 1$
공통부분은 $x = 1$

i), ii), iii)를 합하면,　$-3 \le x \le 1$

$\therefore$ 정수 x의 개수 5 개

14. 다음 중 부등식 $x^2-4ax+a^2-2a+1<0$ 의 해가 존재하지 않기 위한 a의 범위는? (단, a는 실수)

① $-3 \le a \le 1$　② $-1 \le a \le \frac{1}{3}$　③ $-3 < a < 1$
④ $-1 < a < \frac{1}{3}$　⑤ $-1 \le a \le 1$

해설
$x^2-4ax+a^2-2a+1<0$ 의 해가
존재하지 않을 조건은
방정식 $x^2-4ax+a^2-2a+1=0$ 의
판별식 $D \le 0$ 이다.
$\therefore \ \frac{D}{4}=4a^2-(a^2-2a+1) \le 0$
$(3a-1)(a+1) \le 0$
$\therefore \ -1 \le a \le \frac{1}{3}$

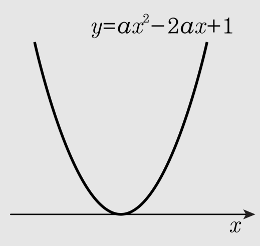
15. 부등식 $ax^2 - 2ax + 1 \leq 0$이 단 하나의 해를 갖도록 하는 실수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

주어진 부등식이 단 하나의 해를 가지려면
$y = ax^2 - 2ax + 1$ 의 그래프가 다음 그림과 같아야 한다.



(i) 그래프가 아래로 볼록이므로 $a > 0$
(ii) $ax^2 - 2ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
$\frac{D}{4} = a^2 - a = 0$ 에서 $a = 0$ 또는 $a = 1$
(i), (ii) 에서 $a = 1$

16. x에 관한 이차방정식 $x^2 - ax + 9 = 0$이 $x < 1$에서 두 개의 실근을 갖도록 하는 실수 a의 범위를 구하면 $a \leq k$이다. 이 때, k의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $k = -6$

해설

$f(x) = x^2 - ax + 9$라 놓으면

ⅰ) 축이 $x < 1$에 있어야 하므로 $\frac{1}{2}a < 1,\ a < 2$

ⅱ) $f(1) > 0,\quad 1 - a + 9 > 0,\quad a < 10$

ⅲ) 두 개의 실근을 가져야 하므로

$\mathrm{D} = a^2 - 4 \cdot 9 \geq 0,\ \ a \geq 6,\ a \leq -6$

따라서 ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의해 $a \leq -6$

$\therefore k = -6$

17. 두 점 A, B 에 대하여 선분 AB를 1 : 2 로 내분하는 점이 P(2, 3), 1 : 2 로 외분하는 점이 Q(−2, 7) 일때, 선분 AB 의 길이는?

① $2\sqrt{3}$ ② $3\sqrt{2}$ ③ $4\sqrt{2}$ ④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

해설

$\mathrm{A}(a, b), \mathrm{B}(c, d)$ 라고 하면
선분 AB 를 1 : 2 로 내분하는 점은
$\mathrm{P}\left(\frac{c+2a}{1+2}, \frac{d+2b}{1+2}\right) = \mathrm{P}(2, 3)$
$\therefore\ 2a + c = 6, 2b + d = 9$
1 : 2 로 외분하는 점은
$\mathrm{Q}\left(\frac{c-2a}{1-2}, \frac{d-2b}{1-2}\right) = \mathrm{Q}(-2,\ 7)$
$\therefore\ 2a - c = -2, 2b - d = 7$
따라서 $a = 1, b = 4, c = 4, d = 1$
$\therefore\ \mathrm{A} = (1, 4), \mathrm{B}(4, 1)$
$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(1-4)^2 + (4-1)^2} = 3\sqrt{2}$

18. 좌표평면 위에 세 점 $A(3,\ a)$, $B(b,\ 4)$, $C(a,\ b)$가 있다. 선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점의 좌표가 $P(b,\ a+3)$일 때, △ABC의 무게중심의 좌표를 구하면?

① $(3,\ 2)$ ② $\left(\frac{4}{3},\ \frac{3}{2}\right)$ ③ $\left(\frac{4}{3},\ 2\right)$
④ $(2,\ 2)$ ⑤ $\left(\frac{5}{3},\ 2\right)$

해설

$\frac{3b+2\cdot 3}{3+2}=b$, $\frac{3\cdot 4+2\cdot a}{3+2}=a+3$ 이므로,

$3b+6=5b$, $12+2a=5(a+3)$ 에서 $a=-1$, $b=3$

$A(3,\ -1)$, $B(3,\ 4)$, $C(-1,\ 3)$ 이므로

삼각형 ABC 의 무게중심을 $G(x,\ y)$ 라 하면

$x=\frac{3+3-1}{3}=\frac{5}{3}$, $y=\frac{-1+4+3}{3}=2$

$\therefore\ G\left(\frac{5}{3},\ 2\right)$

19. A $(1, 1)$, B $(-2, -3)$, C $(k, k+1)$이 일직선 위에 있도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 4$

해설

A, B, C가 일직선 위에 있으려면
$\overline{\mathrm{AB}}$와 $\overline{\mathrm{BC}}$의 기울기가 일치해야 한다.

$\therefore \quad \dfrac{-3-1}{-2-1} = \dfrac{k+1-(-3)}{k-(-2)}$

$\Rightarrow \quad \therefore\ k = 4$

20. 다음 두 원 $x^2+y^2=9$ 와 $(x-12)^2+(y-5)^2=25$ 의 공통외접선과 공통내접선의 길이를 각각 구하면?

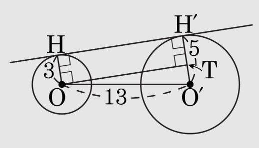
① $\sqrt{91}$, $\sqrt{103}$　　② $\sqrt{161}$, $\sqrt{145}$　　③ $\sqrt{165}$, $\sqrt{105}$

④ $\sqrt{151}$, $\sqrt{101}$　　⑤ $\sqrt{127}$, $\sqrt{105}$

해설

두 원의 반지름의 길이는 각각 $3, 5$ 이고,
두 원의 중심을 각각 O, O' 이라고 할 때,
$\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{O}'(12,5)$ 이므로
중심거리는 $\sqrt{12^2+5^2}=13$ 이다.

(i) 다음 그림과 같이 점 O 에서 $\overline{\mathrm{O'H'}}$ 에 내린 수선의 발을 T 라고 하면

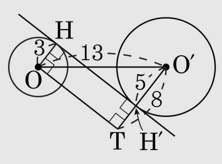


$\overline{\mathrm{TH'}}=\overline{\mathrm{OH}}=3$ 이므로
$\overline{\mathrm{O'T}}=5-3=2$
한편, $\triangle\mathrm{OTO'}$ 은 직각삼각형이므로
피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{OT}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OO'}}^2-\overline{\mathrm{O'T}}^2}=\sqrt{13^2-2^2}=\sqrt{165}$

이때, $\overline{\mathrm{HH'}}=\overline{\mathrm{OT}}$ 이므로
구하는 공통외접선의 길이는 $\sqrt{165}$

(ii) 다음 그림과 같이 점 O 에서 $\overline{\mathrm{O'H'}}$ 의 연장선에 내린 수선의 발을 T 라고 하면



$\overline{\mathrm{TH'}}=\overline{\mathrm{OH}}=3$ 이므로 $\overline{\mathrm{O'T}}=5+3=8$
한편, $\triangle\mathrm{OTO'}$ 은 직각삼각형이므로 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{OT}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OO'}}^2-\overline{\mathrm{O'T}}^2}=\sqrt{13^2-8^2}=\sqrt{105}$

이 때, $\overline{\mathrm{HH'}}=\overline{\mathrm{OT}}$ 이므로 구하는 공통내접선의 길이는 $\sqrt{105}$

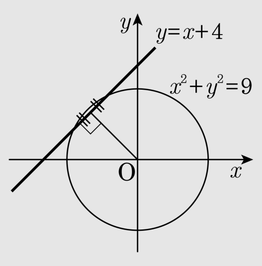
21. 직선 $y = x+4$가 원 $x^2+y^2 = 9$에 의해서 잘린 현의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

원의 중심 원점에서 직선에 이르는 거리는 직선 $x - y + 4 = 0$ 이므로 $\frac{|4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$



원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을 수직이등분하므로 피타고라스 정리에서 ,

현의 길이는 $2\sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2$

22. 원 $(x-1)^2+(y+2)^2=5$ 을 x 축 방향으로 2 , y 축 방향으로 5 만큼 평행이동 했을 때, 이 원의 중심의 좌표를 (a, b) 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=6$

해설

원의 중심 $(1, -2)$ 를 x 축으로 2, y 축으로
5 평행 이동시키면, $(1, -2) \rightarrow \quad (3, 3)$
$\therefore a=3, b=3, a+b=6$

23. 원 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하였더니 직선 $y=x$에 대하여 대칭인 도형이 되었다. 이때 $2m-n$의 값은?

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 7　　⑤ 9

해설

원 $x^2+y^2+2x-4y+4=0$,
즉 원 $(x+1)^2+(y-2)^2=1$을
x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼
평행이동한 도형은 중심이 $(-1+m,\ 2+n)$이고
반지름의 길이가 1인 원이다.
이때 두 원이 직선 $y=x$에 대칭이므로
$(-1+m,\ 2+n)=(2,\ -1)$
$m=3,\ n=-3$이므로 $2m-n=9$

24. $x^2 + y^2 \le r$가 나타내는 영역이 $|x| \le 1, |y| \le 1$가 나타내는 영역에 포함된다고 할 때, 양수 r 의 최솟값을 구하여라.

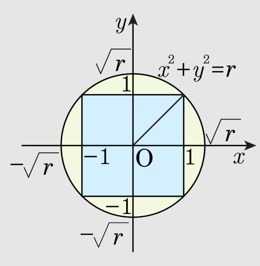
▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

집합 $A = \{(x, y) \mid |x| \le 1, |y| \le 1\}$ 에서
$A = \{(x, y) \mid -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}$ 이고,
집합 B 가 나타내는 영역은 원 $x^2 + y^2 = r$ 의 내부(경계포함)
이다.

조건을 만족하려면 오른쪽 그림에서
원의 반지름의 길이 $\sqrt{r}$ 가 $\sqrt{2}$ 보다
크거나 같아야 한다. 즉, $\sqrt{r} \ge \sqrt{2}$
$\therefore r \ge 2$
따라서, r 의 최솟값은 2 이다.



25. 부등식 $(x^2+y^2-2)(x^2+y^2-k) \le 0$ 이 나타내는 영역의 넓이가 6π 일 때, 양수 k 의 값은? (단, $k>2$)

① $2\sqrt{2}$ ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

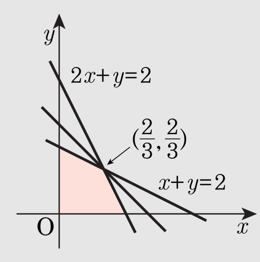
부등식 $(x^2+y^2-2)(x^2+y^2-k) \le 0$ 이 나타내는 영역의 넓이는 $(k-2)\pi = 6\pi$ 에서 $k=8$

26. 두 실수 $x,\ y$ 가 부등식 $x \geq 0$, $y \geq 0$, $2x+y \leq 2$, $x+2y \leq 2$ 를 모두 만족시킬 때, 실수 $x+y$ 의 최댓값을 구하면?

① 0 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{7}{3}$

해설

$x+y=k$ 라 하면,
$x+y=k$ 이 직선을 영역 안에서 움직여보면
점 $\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$를 지날 때 최대이므로
$x+y$의 최댓값은
$\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$



27. x에 대한 항등식 $(x^2 - x - 1)^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_6x^6$ 에서 $a_1 + a_3 + a_5$ 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

양변에 $x = 1$을 대입하면,
$-1 = a_0 + a_1 + \ \cdots\ + a_6 \quad \cdots$ ㉠
양변에 $x = -1$을 대입하면,
$1 = a_0 - a_1 + \ \cdots\ + a_6 \quad \cdots$ ㉡
㉠ − ㉡: $-2 = 2(a_1 + a_3 + a_5)$
$\therefore\ a_1 + a_3 + a_5 = -1$

28. $a(a+1)=1$일 때, $\dfrac{a^6-1}{a^4-a^2}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

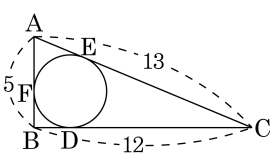
$\dfrac{a^6-1}{a^4-a^2}=\dfrac{(a^3+1)(a^3-1)}{a^2(a^2-1)}$

$=\dfrac{(a+1)(a^2-a+1)(a-1)(a^2+a+1)}{a^2(a+1)(a-1)}$

$=\dfrac{(a^2-a+1)(a^2+a+1)}{a^2}\leftarrow a^2=1-a$ 대입

$=\dfrac{2(1-a)\times 2}{1-a}=4$

29. 다음 그림과 같이 $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 12$, $\overline{AC} = 13$, $\angle B = 90°$인 직각삼각형 ABC에 내접하는 원이 $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$에 접하는 점을 각각 D, E, F라 하자. $\overline{BF} = \alpha$, $\overline{AE} = \beta$라 할 때, α, β를 두 근으로 하고 x^2이 계수가 1인 이차방정식은?



① $x^2 - 5x + 6 = 0$　　② $x^2 + 5x + 6 = 0$

③ $x^2 - 12x + 20 = 0$　　④ $x^2 + 12x + 20 = 0$

⑤ $x^2 - 13x + 30 = 0$

해설

$\overline{BF} = \overline{BD} = \alpha$, $\overline{AF} = \overline{AE} = 5 - \alpha = \beta$,

$\overline{CD} = \overline{CE} = 12 - \alpha$

그런데 $\overline{AC} = \overline{AE} + \overline{CE}$이므로

$(5 - \alpha) + (12 - \alpha) = 13$

$2\alpha = 4 \quad \therefore \alpha = 2$

$\overline{AE} = 5 - 2 = 3 \quad \therefore \beta = 3$

두 수 2, 3을 두 근으로 하고 x^2의 계수가 1인 이차방정식은

$x^2 - (2 + 3)x + 2 \times 3 = 0$

$\therefore x^2 - 5x + 6 = 0$

30. 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 P에서의 접선이 점 $(3,\ 1)$을 지날 때, 점 P의 좌표를 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$라 할 때, $a+b+c+d$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

접점을 (x_1, y_1)이라 하면 접선은

$x_1x+y_1y=5\cdots$ ①

이것이 점 $(3,1)$을 지나므로

$3x_1+y_1=5\cdots$ ②

또, (x_1, y_1)은 $x^2+y^2=5$

위의 점이므로 $x_1^2+y_1^2=5\cdots$ ③

② 에서 $y_1=5-3x_1$ 을 ③에 대입하면

$x_1^2+(5-3x_1)^2-5=0$,

$10x_1^2-30x_1+20=0$

$10(x_1-1)(x_1-2)=0$

$\therefore x_1=1$이면 $y_1=2$, $x_1=2$이면 $y_1=-1$

$\therefore$ 접점은 $(1,2),(2,-1)$

31. 직선 $y=\frac{3}{2}x-3$을 x축 방향으로 a만큼, y축 방향으로 b만큼 평행이동한 직선은 네 점 $\mathrm{P}(1,3)$, $\mathrm{Q}(3,0)$, $\mathrm{R}(5,3)$, $\mathrm{S}(3,6)$을 꼭짓점으로 하는 마름모 PQRS 의 넓이를 이등분한다. 이 때, a,b 사이의 관계식은?

① $a+b+1=0$　　② $2a-3b+3=0$

③ $3a-b+3=0$　　④ $2a-2b+1=0$

⑤ $3a-2b+3=0$

해설

직선 $y=\frac{3}{2}x-3$을
x축의 방향으로 a만큼,
y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 직선은
$y-b=\frac{3}{2}(x-a)-3$ $\cdots$ ㉠
직선 ㉠이 마름모 PQRS의 넓이를
이등분하려면 대각선
$\overline{\mathrm{PR}}$와 $\overline{\mathrm{QS}}$의 교점인 $\overline{\mathrm{PR}}$의 중점을 지나야 한다.
이 때, $\overline{\mathrm{PR}}$의 중점을 M이라 하면 M의 좌표는 $\left(\frac{1+5}{2}, \frac{3+3}{2}\right)=$
$(3,\ 3)$
직선 ㉠이 점 $(3,\ 3)$을 지나므로
$3-b=\frac{3}{2}(3-a)-3,\ 6-2b=3(3-a)-6$
$\therefore\ \ 3a-2b+3=0$

32. 실계수 이차방정식이 두 허근 α, β를 갖고 $\alpha^2 + 2\beta = 1$일 때, 이 이차 방정식은?

① $x^2 + 2x + 3 = 0$　　② $x^2 + 4x + 6 = 0$

③ $x^2 - 2x + 3 = 0$　　④ $x^2 - 4x + 6 = 0$

⑤ $x^2 - 3x + 2 = 0$

해설

$\alpha = m + ni,\ \beta = m - ni$

$(m,\ n\ :\ $ 실수, $n \neq 0)$라 놓으면

$$\begin{aligned}\alpha^2 + 2\beta &= (m + ni)^2 + 2(m - ni) \\ &= (m^2 - n^2 + 2m) + 2n(m - 1)i = 1\end{aligned}$$에서

$n \neq 0$이므로 $m = 1,\ n^2 = 2$

$\alpha + \beta = 2m = 2$

$\alpha\beta = m^2 + n^2 = 3$

$\therefore\ \alpha,\ \beta$를 두 근으로 갖는 이차방정식은

$x^2 - 2x + 3 = 0$

33. 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$의 해를 p, q $(-1 < p < 0 < q < 1)$라 하자. 이차방정식 $cx^2 - bx + a = 0$의 해를 $r, s(r < s)$라 할 때, p, q, r, s의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $p < q < r < s$

② $r < s < p < q$

③ $p < r < s < q$

④ $r < p < q < s$

⑤ 이 조건만으로는 알 수 없다.

해설

근과 계수와의 관계에 의하여

$p + q = -\frac{b}{a},\ pq = \frac{c}{a}$

따라서, $r + s = \frac{b}{c} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{p+q}{pq}$

$= \left(-\frac{1}{p}\right) + \left(-\frac{1}{q}\right) \cdots ㉠$

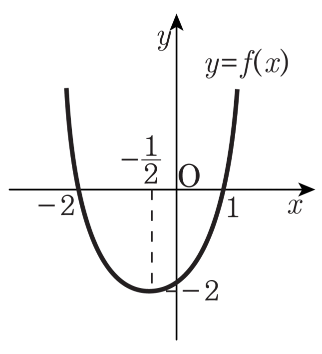
$rs = \frac{a}{c} = \frac{1}{pq} = \left(-\frac{1}{p}\right)\left(-\frac{1}{q}\right) \cdots ㉡$

㉠, ㉡에서 $\{r,\ s\} = \left\{-\frac{1}{p},\ -\frac{1}{q}\right\}$

$-1 < p < 0$에서 $-\frac{1}{p} > 1$, $0 < q < 1$ 에서 $-\frac{1}{q} < -1$

$\therefore\ r = -\frac{1}{q} < -1 < p < q < 1 < -\frac{1}{p} = s$

34. 다음 그림은 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프이다. 방정식 $f(f(x)) = 0$ 의 서로 다른 세 실근의 합은?



① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ 0 ⑤ 1

해설

$f(x) = 0$ 의 두 근이 -2 와 1 이므로

$f(f(x)) = 0$ 에서 $f(x) = -2$ 또는 $f(x) = 1$

i) $f(x) = -2$ 에서 $x = -\frac{1}{2}$

ii) $f(x) = 1$ 에서 $x = -\frac{1}{2} + \alpha$, $x = -\frac{1}{2} - \alpha$

따라서 모든 근의 합은

$-\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2} + \alpha\right) + \left(-\frac{1}{2} - \alpha\right) = -\frac{3}{2}$

35. 분수함수 $y=\dfrac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}$는 $x=a$일 때 최댓값 α를 갖고, $x=b$일 때 최솟값 β를 갖는다. 이 때, $a+b+\alpha\beta$의 값은?

① $\dfrac{3}{2}$　　② 1　　③ 2　　④ $\dfrac{5}{2}$　　⑤ $\dfrac{3}{4}$

해설

$y=\dfrac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}$에서

$(y-1)x^2+(3y+3)x+4(y-1)=0$

i) $y=1$일 때, $x=0$(실수)

ii) $y\neq 1$일 때, $D=9(y+1)^2-16(y-1)^2\geq 0$

$(7y-1)(y-7)\leq 0 \quad \therefore \ \dfrac{1}{7}\leq y\leq 7$

i), ii) 에서

최댓값 $\alpha=7$, 이 때 $x=-2=a$

최솟값 $\beta=\dfrac{1}{7}$, 이 때 $x=2=b$

$\therefore \ a+b+\alpha\beta=1$