

1. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 4 \text{ 보다 작은 자연수}\}$ 에 대하여 $X \subset A, X \neq A$ 인 집합 X 를 구한 것 중 옳지 않은 것은?

① $\emptyset$

② $\{2\}$

③ $\{1, 2\}$

④ $\{1, 3\}$

⑤ $\{1, 2, 3\}$

해설

진부분집합의 또다른 정의는 $X \subset A, X \neq A$ 이다.

따라서 $A = \{x \mid x \text{는 } 4 \text{ 보다 작은 자연수}\}$ 의 진부분집합을 구하는 문제와 같은 문제이다.

$A = \{x \mid x \text{는 } 4 \text{ 보다 작은 자연수}\} = \{1, 2, 3\}$ 이므로 $\{1, 2, 3\}$ 의 진부분집합을 구하면

$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ 이다.

2. 두 집합 $\{5, 6, 8\}$, $\{8, a+2, 5\}$ 가 서로 같을 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 집합이 서로 같으려면 $a+2=6$ 이어야 하므로 $a=4$

3. 두 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$, $B = \{1, 3, 6, 9, 12\}$ 일 때, $n(A \cup B)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

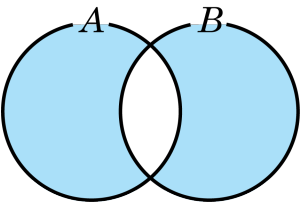
해설

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12\}$$

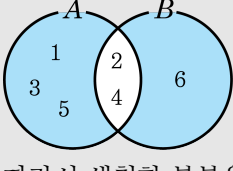
$$\therefore n(A \cup B) = 11$$

4. 두 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ 에 대하여 다음 벤 다이어그램에서 색칠한 부분을 나타내는 집합은?



- ① {1, 2}
- ② {2, 3}
- ③ {1, 3, 4}
- ④ {1, 3, 4, 6}
- ⑤ {1, 3, 5, 6}

해설



따라서 색칠한 부분을 나타내는 집합은 {1, 3, 5, 6} 이다.

5. 두 집합 $B = \{x \mid x \text{는 } 4\text{의 배수}\}$, $A = \{x \mid x \text{는 } 8\text{의 배수}\}$ 일 때, $A - B$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\emptyset$

해설

$A \subset B$ 이므로 $A - B = \emptyset$ 이다.

6. $a > 0, b > 0$ 일 때, $\sqrt{2(a+b)}, \sqrt{a} + \sqrt{b}$ 의 대소를 바르게 나타낸 것은?

① $\sqrt{2(a+b)} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

② $\sqrt{2(a+b)} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

③ $\sqrt{2(a+b)} > \sqrt{a} + \sqrt{b}$

④ $\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

⑤ $\sqrt{2(a+b)} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

해설

$$\begin{aligned} & (\sqrt{2(a+b)})^2 - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \\ &= 2(a+b) - (a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b) \\ &= a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \\ &= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

(단, 등호는 $a = b$ 일 때 성립)

$$\text{따라서 } \sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

7. 다음 중 유한집합인 것을 모두 골라라.

- ㉠

$\{x \mid x \text{는 자연수}\}$
- ㉡

$\{x \mid x \text{는 가장 작은 자연수}\}$
- ㉢

$\{x \mid 0 < x < 1, x \text{는 자연수}\}$
- ㉤

$\{1, 2, 3, 4, 6, 12, 24\}$
- ㉥

$\{x \mid x \text{는 1보다 작은 수}\}$
- ㉦

$\{x \mid x \text{는 100보다 작은 2의 배수}\}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

▷ 정답 : ㉢

▷ 정답 : ㉤

▷ 정답 : ㉦

해설

- ㉠ $\{1, 2, 3, \dots\}$ 이므로 무한집합이다.
- ㉡ 가장 작은 자연수는 1 이므로 유한집합이다.
- ㉢ 0과 1 사이에 자연수는 존재하지 않으므로 공집합 즉, 유한 집합이다.
- ㉤ 유한집합
- ㉥ 1보다 작은 수는 $0, -1, -\frac{1}{2}, \dots$ 등 무수히 많이 존재하므로 무한집합이다.
- ㉦ $\{2, 4, 6, 8, \dots, 96, 98\}$ 이므로 유한집합이다.

8. 집합 $A = \{\emptyset, a, \{a, b\}\}$ 일 때, $n(A)$ 를 구하여라.

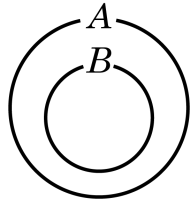
▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

집합 A 에서 $\{a, b\}$ 은 하나의 원소이므로 $n(A) = 3$ 이다.

9. 두 집합 A, B 의 포함관계가 아래 벤 다이어그램으로 나타내어져 있다.



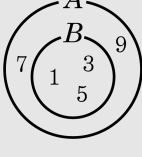
$A = \{1, 3, 5, 7, a\}$, $B = \{x|x\text{는 } 9\text{의 약수}\}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$A = \{1, 3, 5, 7, a\}$, $B = \{x|x\text{는 } 9\text{의 약수}\} = \{1, 3, 9\}$
그런데 $B \subset A$ 이기 때문에, $9 \in A$ 이어야 하므로 $a = 9$ 이다.



10. 집합 $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ 의 부분집합 중 짝수만으로 이루어진 것의 개수는?

- ① 7개 ② 16개 ③ 28개 ④ 30개 ⑤ 31개

해설

짝수만으로 이루어진 부분집합은 집합 $\{2, 4, 6\}$ 의 부분집합에서 공집합을 제외하면 되므로 $2^3 - 1 = 7$ (개)

11. 두 집합 $A = \{b, c\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$ 에 대하여 $A \subset X \subset B$ 를 만족하는 집합 X 가 될 수 없는 것을 모두 고르면? (정답 2개)

- ① $\{b, c\}$

② $\{a, b, c\}$

③ $\{a, c, e\}$
- ④ $\{a, b, f\}$

⑤ $\{a, b, c, d, e\}$

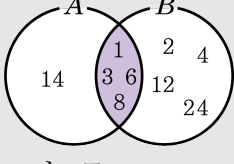
해설

- ③ $\{b, c\} \not\subset \{a, c, e\}$
- ④ $\{b, c\} \not\subset \{a, b, f\}$

12. $A = \{1, 3, 6, 8, 14\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } 24 \text{의 약수}\}$ 일 때, $A \cup B$ 를 구하면?
- ① $\{1, 3, 6, 8\}$
 - ② $\{1, 3, 6, 8, 12, 24\}$
 - ③ $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 14, 24\}$
 - ④ $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 14, 24\}$
 - ⑤ $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

해설

$A \cup B$ 는 A 에 속하거나 B 에 속하는 원소로 이루어진 집합이다.
다음 벤다이어그램과 같은 원소를 가지게 된다.



그러므로 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 14, 24\}$ 가 된다.

13. 두 집합 $A = \{a - 3, 4, 6\}$, $B = \{5, b + 2, 8\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{5, 6\}$ 일 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$A \cap B = \{5, 6\}$ 이므로

$5 \in A$ 이므로 $a - 3 = 5 \quad \therefore a = 8$

$6 \in B$ 이므로 $b + 2 = 6 \quad \therefore b = 4$

$\therefore a - b = 8 - 4 = 4$

14. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A \cup B) - A = \emptyset$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은?

① $A \subset B$

② $A \cap B = \emptyset$

③ $A \cap B = A$

④ $A \cup B = A$

⑤ $A \cup B = U$

해설

B 집합이 A 집합 안에 포함된다는 의미이므로 ④가 정답이다.

15. 부등식 $|x + y| \leq |x| + |y|$ 에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

- ① $x = y$ ② $xy > 0$ ③ $xy \geq 0$
④ $x \geq 0, y \geq 0$ ⑤ $x \leq 0, y \leq 0$

해설

$|x + y| = |x| + |y|$ 의 양변을 제곱하여 정리하면
 $xy = |xy|$
(i) $xy = |xy| \Rightarrow xy \geq 0$
(ii) 또 $xy > 0$ 이면 x, y 는 같은 부호이므로 등식이 성립한다.
 $xy = 0$ 이면 등호가 성립한다.
따라서, $xy \geq 0 \Rightarrow xy = |xy|$
(i), (ii) 에서
 $xy = |xy| \Leftrightarrow xy \geq 0$

16. 명제 ' $|x-1| \leq a$ 이면 $|x| < 3$ 이다.'가 참이 되기 위한 a 의 값의 범위는?
(단, x, y 는 실수이고, $a > 0$)

① $0 < a \leq 2$

② $0 < a < 2$

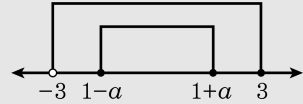
③ $0 < a \leq 4$

④ $0 < a < 4$

⑤ $0 < a < 5$

해설

$|x-1| \leq a$ 에서 $-a \leq x-1 \leq a \therefore 1-a \leq x \leq 1+a$ $|x| < 3$ 에서 $-3 < x < 3$ 따라서 주어진 명제가 참이 되려면,



위의 그림에서 $1-a > -3$ 그리고 $1+a < 3 \therefore a < 4$ 그리고 $a < 2 \therefore a < 2$ 그런데 $0 < a$ 이므로, $0 < a < 2$

17. 다음 명제의 이가 참인 것은? .

- ① $a = b$ 이면 $ac = bc$ 이다.
- ② 9 의 배수이면 3 의 배수이다.
- ③ $\angle A = 90^\circ$ 이면 $\triangle ABC$ 는 직각삼각형이다.
- ④ $a = 3$ 이면 $a^2 - 4a + 3 = 0$ 이다.
- ⑤ ab 가 유리수이면, a, b 가 유리수이다.

해설

- ① $a \neq b$ 이면 $ac \neq bc$ 이다. (거짓)
(반례) $a = 1, b = 2, c = 0$ 일 때, $a \neq b$ 이지만 $ac = bc$ 이다.
- ② 9 의 배수가 아니면 3 의 배수가 아니다. (거짓)
(반례) 6 은 9 의 배수가 아니지만 3 의 배수이다.
- ③ $\angle A \neq 90^\circ$ 이면 $\triangle ABC$ 는 직각삼각형이 아니다. (거짓)
(반례) $\angle B = 90^\circ$ 이면 $\triangle ABC$ 는 직각삼각형이다.
- ④ $a \neq 3$ 이면 $a^2 - 4a + 3 \neq 0$ 이다. (거짓)
(반례) $a = 1$ 이면 $a^2 - 4a + 3 = 0$ 이다.
- ⑤ ab 가 무리수이면, a 또는 b 가 무리수이다. (참)

18. 세 명제 $\sim p \rightarrow q, q \rightarrow \sim r$ 가 참이고, 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 할 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

- ① $P \subset Q$

② $R \subset Q^c$

③ $R \cup P^c = R$
- ④ $P \subset R$

⑤ $R \cap Q = R$

해설

$\sim p \rightarrow q, q \rightarrow \sim r$ 가 참이므로
 $\sim p \rightarrow q \rightarrow \sim r$ 에서 $P^c \subset Q \subset R^c$ 이다.

① $P \not\subset Q$
② $Q \subset R^c$ 이므로 $R \subset Q^c$
③ $P^c \subset R^c$ 이므로 $R \cup P^c \neq R$
④ $P^c \subset R^c$ 이므로 $R \subset P$
⑤ $Q \subset R^c$ 에서 $R \subset Q^c$ 이므로 $R \cap Q \neq R$

19. 다음 조건 p 는 조건 q 이기 위한 어떤 조건인지 구하여라.(단, a, b 는 실수)

(i) $p : a, b$ 는 유리수, $q : a + b, ab$ 는 유리수
(ii) $p : x$ 는 3의 배수, $q : x$ 는 6의 배수

▶ 답: 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

20. 다음 보기 중에서 두 조건 p, q 에 대하여 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것을 모두 고른 것은?

보기

- ㉠ $p : A \cap B = A, q : A \subset B$
- ㉡ $p : x > 1$ 이고 $y > 1, q : x + y > 2$
- ㉢ $p : x + |x| = 0, q : x < 0$

- ① ㉠
- ② ㉡
- ③ ㉢
- ④ ㉠, ㉡
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

- ㉡ 충분조건
- ㉢ 필요조건 $p : x + |x| = 0 \rightarrow x \leq 0$

21. 세 조건 $p: |x| < 1, q: x > a, r: x > 2$ 에 대하여 p 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이고 q 는 r 이기 위한 필요조건이 되도록 하는 a 의 값의 범위는?

① $1 < a < 2$

② $1 \leq a \leq 2$

③ $a < 1$ 또는 $a > 2$

④ $a \leq 1$ 또는 $a \geq 2$

⑤ $a > 0$

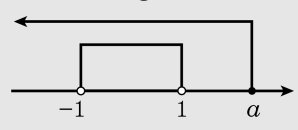
해설

$$p: |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

p 는 $\sim q$ 이기 위한 충분조건이므로

$$\{x \mid -1 < x < 1\} \subset \{x \mid x \leq a\}$$

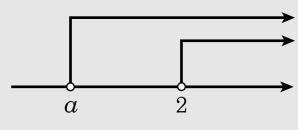
$$\therefore a \geq 1 \dots \textcircled{A}$$



q 는 r 이기 위한 필요조건이므로

$$\{x \mid x > 2\} \subset \{x \mid x > a\}$$

$$\therefore a \leq 2 \dots \textcircled{B}$$



따라서, ㉠과 ㉡을 동시에 만족시켜야 하므로 $1 \leq a \leq 2$

22. 두 명제 $p \rightarrow q$ 와 $q \rightarrow r$ 가 모두 참이면 명제 $p \rightarrow r$ 도 참이 된다. 이 성질을 이용하여 다음을 구하여라.

네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 r 이기 위한 충분조건, q 는 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다.

이 때, p 는 q 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 충분조건

해설

$p \rightarrow r, q \rightarrow r, r \rightarrow s, s \rightarrow q$ 가 참이다. $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow q$ 이므로 $p \Rightarrow q$ 이다.
 $\therefore p$ 는 q 이기 위한 충분조건이다.

23. 다음은 $a \geq 0, b \geq 0$ 인 두 실수 a, b 에 대하여 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 임을 증명한 것이다. 물음에 답하여라.

$$\begin{aligned} & [\text{㉠}] - [\text{㉡}] \\ &= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \quad [\text{㉢}] \end{aligned}$$

따라서, $[\text{㉠}] \geq [\text{㉡}]$
한편, 등호는 $[\text{㉢}]$ 일 때 성립한다.

위의 증명에서 ㉠, ㉡, ㉢, ㉣에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

- ① ㉠ $a+b$ ㉡ $\sqrt{ab}$ ㉢ ≥ 0 ㉣ $a=0, b=0$

② ㉠ $\frac{a+b}{2}$ ㉡ $2\sqrt{ab}$ ㉢ ≤ 0 ㉣ $a=0, b=0$

③ ㉠ $\frac{a+b}{2}$ ㉡ $\sqrt{ab}$ ㉢ ≥ 0 ㉣ $a=b$

④ ㉠ $\sqrt{ab}$ ㉡ $a+b$ ㉢ ≥ 0 ㉣ $a=b$

⑤ ㉠ $2\sqrt{ab}$ ㉡ $\frac{a+b}{2}$ ㉢ ≤ 0 ㉣ $a=0, b=0$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \\ &= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0 \\ \therefore \frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab} \end{aligned}$$

한편, 등호는 $a=b$ 일 때 성립한다.

24. 다음 안에 알맞은 세 자연수의 합을 구하여라.

보기

㉠ $n(\{x|x \text{는 } \square \text{미만의 자연수}\}) = 4$

㉡ $n(\{a, b, c, d\}) - n(\{b, c, d\}) = \square$

㉢ $A \subset \{1, 2, 3\}$ 이고, $n(A) = 2$ 를 만족하는 집합 A 의 개수는 개이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

㉠ $n(\{x|x \text{는 } 5 \text{ 미만의 자연수}\}) = 4$

㉡ $n(\{a, b, c, d\}) - n(\{b, c, d\}) = 1$

㉢ $A \subset \{1, 2, 3\}$ 이고, $n(A) = 2$ 를 만족하는 집합 A 는 $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ 의 3 개

$\therefore 5 + 1 + 3 = 9$

25. 두 집합 A, B 가 다음과 같을 때, $X \cap A = X, X \cup (A \cap B) = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

$A = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{ 이하의 자연수}\}, B = \{3, 5, 7\}$

- ① 2개 ② 4개 ③ 6개 ④ 8개 ⑤ 10개

해설

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A \cap B = \{3, 5\}, X \cap A = X$ 이므로 $X \subset A$

$X \cup (A \cap B) = X$ 이므로 $A \cap B \subset X$

$\{3, 5\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

따라서 집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 원소 3, 5를 반드시 포함하는 집합이므로

$2^{5-2} = 2^3 = 8(\text{개})$

26. 두 집합 $A = \{5, 2a + 1, 11\}$, $B = \{6 - a, 3a - 2, 13\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{7\}$ 일 때, $B - A$ 는?

- ① $\{5, 7, 11\}$
- ② $\{3, 7, 13\}$
- ③ $\{5, 11\}$
- ④ $\{3, 13\}$
- ⑤ $\{7\}$

해설

$A - B = \{7\}$ 이므로 $7 \in A$, $7 \in B$ 이다.

$2a + 1 = 7 \quad \therefore a = 3$

$B = \{6 - 3, 3 \times 3 - 2, 13\} = \{3, 7, 13\}$

$B - A = \{3, 13\}$

27. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A) = 20$, $n(B) = 16$, $n(A \cup B) = 29$ 일 때, $n(A - B) - n(B - A)$ 는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 20 + 16 - 29 = 7$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 20 - 7 = 13$$

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 16 - 7 = 9$$

$$\therefore n(A - B) - n(B - A) = 13 - 9 = 4$$

28. 길이가 16m인 철조망을 이용하여 마당에 직사각형 모양의 토끼장을 만들어 토끼를 기르려고 한다. 이 때, 토끼장의 넓이의 최대값은?

① 8 m^2 ② 16 m^2 ③ 25 m^2 ④ 36 m^2 ⑤ 64 m^2

해설

가로를 x , 세로를 y 라 하자.

$$2(x+y)=16 \quad x+y=8$$

산술기하평균을 사용하면,

$$x+y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$4 \geq \sqrt{xy}$$

$$\Rightarrow 16 \geq xy$$

$\therefore$ 넓이의 최대값 : $16(\text{m}^2)$