

1. 집합  $A = \{x \mid x \text{는 } 4 \text{ 보다 작은 자연수}\}$  에 대하여  $X \subset A, X \neq A$  인 집합  $X$  를 구한 것 중 옳지 않은 것은?

①  $\emptyset$

②  $\{2\}$

③  $\{1, 2\}$

④  $\{1, 3\}$

⑤  $\{1, 2, 3\}$

**해설**

진부분집합의 또다른 정의는  $X \subset A, X \neq A$  이다.

따라서  $A = \{x \mid x \text{는 } 4 \text{ 보다 작은 자연수}\}$  의 진부분집합을 구하는 문제와 같은 문제이다.

$A = \{x \mid x \text{는 } 4 \text{ 보다 작은 자연수}\} = \{1, 2, 3\}$  이므로  $\{1, 2, 3\}$  의 진부분집합을 구하면

$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$  이다.

2. 두 집합  $\{5, 6, 8\}$ ,  $\{8, a+2, 5\}$  가 서로 같을 때,  $a$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

두 집합이 서로 같으려면  $a+2=6$  이어야 하므로  $a=4$

3. 두 집합  $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ ,  $B = \{1, 3, 6, 9, 12\}$  일 때,  $n(A \cup B)$  를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

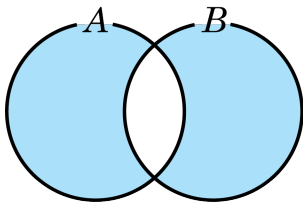
해설

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12\}$$

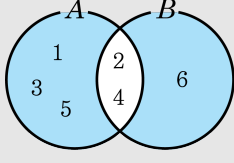
$$\therefore n(A \cup B) = 11$$

4. 두 집합  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $B = \{2, 4, 6\}$  에 대하여 다음 벤 다이어그램에서 색칠한 부분을 나타내는 집합은?



- ①  $\{1, 2\}$                       ②  $\{2, 3\}$                       ③  $\{1, 3, 4\}$   
④  $\{1, 3, 4, 6\}$                 ⑤  $\{1, 3, 5, 6\}$

해설



따라서 색칠한 부분을 나타내는 집합은  $\{1, 3, 5, 6\}$  이다.



5. 두 집합  $B = \{x \mid x \text{는 } 4\text{의 배수}\}$ ,  $A = \{x \mid x \text{는 } 8\text{의 배수}\}$  일 때,  $A - B$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 :  $\emptyset$

해설

$A \subset B$  이므로  $A - B = \emptyset$  이다.

6.  $a > 0, b > 0$  일 때,  $\sqrt{2(a+b)}, \sqrt{a} + \sqrt{b}$  의 대소를 바르게 나타낸 것은?

①  $\sqrt{2(a+b)} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

②  $\sqrt{2(a+b)} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

③  $\sqrt{2(a+b)} > \sqrt{a} + \sqrt{b}$

④  $\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

⑤  $\sqrt{2(a+b)} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

해설

$$\begin{aligned} & (\sqrt{2(a+b)})^2 - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \\ &= 2(a+b) - (a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b) \\ &= a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \\ &= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

(단, 등호는  $a = b$  일 때 성립)

$$\text{따라서 } \sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

7. 다음 중 유한집합인 것을 모두 골라라.

- ㉠

$\{x \mid x \text{는 자연수}\}$
- ㉡

$\{x \mid x \text{는 가장 작은 자연수}\}$
- ㉢

$\{x \mid 0 < x < 1, x \text{는 자연수}\}$
- ㉤

$\{1, 2, 3, 4, 6, 12, 24\}$
- ㉥

$\{x \mid x \text{는 1보다 작은 수}\}$
- ㉦

$\{x \mid x \text{는 100보다 작은 2의 배수}\}$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉡

▷ 정답 : ㉢

▷ 정답 : ㉤

▷ 정답 : ㉦

해설

- ㉠  $\{1, 2, 3, \dots\}$  이므로 무한집합이다.
- ㉡ 가장 작은 자연수는 1 이므로 유한집합이다.
- ㉢ 0과 1 사이에 자연수는 존재하지 않으므로 공집합 즉, 유한 집합이다.
- ㉤ 유한집합
- ㉥ 1보다 작은 수는  $0, -1, -\frac{1}{2}, \dots$  등 무수히 많이 존재하므로 무한집합이다.
- ㉦  $\{2, 4, 6, 8, \dots, 96, 98\}$  이므로 유한집합이다.

8. 집합  $A = \{\emptyset, a, \{a, b\}\}$  일 때,  $n(A)$  를 구하여라.

▶ 답 :

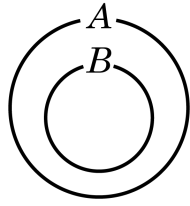
▷ 정답 : 3

해설

집합  $A$  에서  $\{a, b\}$  은 하나의 원소이므로  $n(A) = 3$  이다.



9. 두 집합  $A, B$ 의 포함관계가 아래 벤 다이어그램으로 나타내어져 있다.



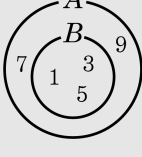
$A = \{1, 3, 5, 7, a\}$ ,  $B = \{x|x\text{는 } 9\text{의 약수}\}$  일 때,  $a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$A = \{1, 3, 5, 7, a\}$ ,  $B = \{x|x\text{는 } 9\text{의 약수}\} = \{1, 3, 9\}$   
그런데  $B \subset A$  이기 때문에,  $9 \in A$  이어야 하므로  $a = 9$  이다.



10. 집합  $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$  의 부분집합 중 짝수만으로 이루어진 것의 개수는?

- ① 7개      ② 16개      ③ 28개      ④ 30개      ⑤ 31개

해설

짝수만으로 이루어진 부분집합은 집합  $\{2, 4, 6\}$  의 부분집합에서 공집합을 제외하면 되므로  $2^3 - 1 = 7$ (개)

11. 두 집합  $A = \{b, c\}$ ,  $B = \{a, b, c, d, e\}$  에 대하여  $A \subset X \subset B$  를 만족하는 집합  $X$  가 될 수 없는 것을 모두 고르면? (정답 2개)

①  $\{b, c\}$

②  $\{a, b, c\}$

③  $\{a, c, e\}$

④  $\{a, b, f\}$

⑤  $\{a, b, c, d, e\}$

해설

③  $\{b, c\} \not\subset \{a, c, e\}$

④  $\{b, c\} \not\subset \{a, b, f\}$

12.  $A = \{1, 3, 6, 8, 14\}$ ,  $B = \{x \mid x \text{는 } 24 \text{의 약수}\}$  일 때,  $A \cup B$  를 구하면?
- ①  $\{1, 3, 6, 8\}$
  - ②  $\{1, 3, 6, 8, 12, 24\}$
  - ③  $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 14, 24\}$
  - ④  $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 14, 24\}$
  - ⑤  $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

해설

$A \cup B$  는  $A$  에 속하거나  $B$  에 속하는 원소로 이루어진 집합이다.  
다음 벤다이어그램과 같은 원소를 가지게 된다.

A

B

14

1

3

6

8

2

4

12

24

그러므로  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 14, 24\}$  가 된다.



13. 두 집합  $A = \{a - 3, 4, 6\}$ ,  $B = \{5, b + 2, 8\}$  에 대하여  $A \cap B = \{5, 6\}$  일 때,  $a - b$  의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$A \cap B = \{5, 6\}$  이므로

$5 \in A$  이므로  $a - 3 = 5 \quad \therefore a = 8$

$6 \in B$  이므로  $b + 2 = 6 \quad \therefore b = 4$

$\therefore a - b = 8 - 4 = 4$

14. 전체집합  $U$  의 두 부분집합  $A, B$  에 대하여  $(A \cup B) - A = \emptyset$  가 성립하기 위한 필요충분조건은?

①  $A \subset B$

②  $A \cap B = \emptyset$

③  $A \cap B = A$

④  $A \cup B = A$

⑤  $A \cup B = U$

해설

$B$  집합이  $A$  집합 안에 포함된다는 의미이므로 ④가 정답이다.

15. 부등식  $|x + y| \leq |x| + |y|$  에서 등호가 성립할 필요충분조건은?

①  $x = y$

②  $xy > 0$

③  $xy \geq 0$

④  $x \geq 0, y \geq 0$

⑤  $x \leq 0, y \leq 0$

해설

$|x + y| = |x| + |y|$  의 양변을 제곱하여 정리하면

$$xy = |xy|$$

( i )  $xy = |xy| \Rightarrow xy \geq 0$

( ii ) 또  $xy > 0$  이면  $x, y$  는 같은 부호이므로 등식이 성립한다.

$xy = 0$  이면 등호가 성립한다.

따라서,  $xy \geq 0 \Rightarrow xy = |xy|$

( i ), ( ii ) 에서

$$xy = |xy| \Leftrightarrow xy \geq 0$$

16. 명제 ' $|x-1| \leq a$ 이면  $|x| < 3$  이다.'가 참이 되기 위한  $a$ 의 값의 범위는?  
(단,  $x, y$ 는 실수이고,  $a > 0$ )

①  $0 < a \leq 2$

②  $0 < a < 2$

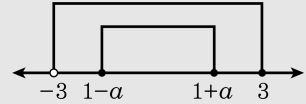
③  $0 < a \leq 4$

④  $0 < a < 4$

⑤  $0 < a < 5$

해설

$|x-1| \leq a$ 에서  $-a \leq x-1 \leq a \therefore 1-a \leq x \leq 1+a$   $|x| < 3$ 에서  $-3 < x < 3$  따라서 주어진 명제가 참이 되려면,



위의 그림에서  $1-a > -3$  그리고  $1+a < 3 \therefore a < 4$  그리고  $a < 2$   
 $\therefore a < 2$  그런데  $0 < a$  이므로,  $0 < a < 2$



17. 다음 명제의 이가 참인 것은? .

- ①  $a = b$  이면  $ac = bc$  이다.
- ② 9 의 배수이면 3 의 배수이다.
- ③  $\angle A = 90^\circ$  이면  $\triangle ABC$  는 직각삼각형이다.
- ④  $a = 3$  이면  $a^2 - 4a + 3 = 0$  이다.
- ⑤  $ab$  가 유리수이면,  $a, b$  가 유리수이다.

해설

- ①  $a \neq b$  이면  $ac \neq bc$  이다. (거짓)  
(반례)  $a = 1, b = 2, c = 0$  일 때,  $a \neq b$  이지만  $ac = bc$  이다.
- ② 9 의 배수가 아니면 3 의 배수가 아니다. (거짓)  
(반례) 6 은 9 의 배수가 아니지만 3 의 배수이다.
- ③  $\angle A \neq 90^\circ$  이면  $\triangle ABC$  는 직각삼각형이 아니다. (거짓)  
(반례)  $\angle B = 90^\circ$  이면  $\triangle ABC$  는 직각삼각형이다.
- ④  $a \neq 3$  이면  $a^2 - 4a + 3 \neq 0$  이다. (거짓)  
(반례)  $a = 1$  이면  $a^2 - 4a + 3 = 0$  이다.
- ⑤  $ab$  가 무리수이면,  $a$  또는  $b$  가 무리수이다. (참)

18. 세 명제  $\sim p \rightarrow q, q \rightarrow \sim r$  가 참이고, 조건  $p, q, r$  를 만족하는 집합을 각각  $P, Q, R$  라 할 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

①  $P \subset Q$

②  $R \subset Q^c$

③  $R \cup P^c = R$

④  $P \subset R$

⑤  $R \cap Q = R$

해설

$\sim p \rightarrow q, q \rightarrow \sim r$  가 참이므로

$\sim p \rightarrow q \rightarrow \sim r$  에서  $P^c \subset Q \subset R^c$  이다.

①  $P \not\subset Q$

②  $Q \subset R^c$  이므로  $R \subset Q^c$

③  $P^c \subset R^c$  이므로  $R \cup P^c \neq R$

④  $P^c \subset R^c$  이므로  $R \subset P$

⑤  $Q \subset R^c$  에서  $R \subset Q^c$  이므로  $R \cap Q \neq R$

19. 다음 조건  $p$  는 조건  $q$  이기 위한 어떤 조건인지 구하여라.(단,  $a, b$  는 실수)

(i)  $p : a, b$  는 유리수,  $q : a + b, ab$  는 유리수  
(ii)  $p : x$  는 3의 배수,  $q : x$  는 6의 배수

▶ 답: 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

20. 다음 보기 중에서 두 조건  $p, q$ 에 대하여  $p$ 가  $q$ 이기 위한 필요충분조건인 것을 모두 고른 것은?

보기

- ㉠  $p : A \cap B = A, q : A \subset B$
- ㉡  $p : x > 1$  이고  $y > 1, q : x + y > 2$
- ㉢  $p : x + |x| = 0, q : x < 0$

- ① ㉠
- ② ㉡
- ③ ㉢
- ④ ㉠, ㉡
- ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

- ㉡ 충분조건
- ㉢ 필요조건  $p : x + |x| = 0 \rightarrow x \leq 0$



21. 세 조건  $p: |x| < 1, q: x > a, r: x > 2$  에 대하여  $p$  는  $\sim q$  이기 위한 충분조건이고  $q$  는  $r$  이기 위한 필요조건이 되도록 하는  $a$  의 값의 범위는?

①  $1 < a < 2$

②  $1 \leq a \leq 2$

③  $a < 1$  또는  $a > 2$

④  $a \leq 1$  또는  $a \geq 2$

⑤  $a > 0$

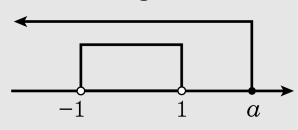
해설

$$p: |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

$p$ 는  $\sim q$ 이기 위한 충분조건이므로

$$\{x \mid -1 < x < 1\} \subset \{x \mid x \leq a\}$$

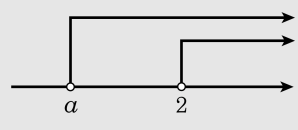
$$\therefore a \geq 1 \cdots \textcircled{A}$$



$q$ 는  $r$ 이기 위한 필요조건이므로

$$\{x \mid x > 2\} \subset \{x \mid x > a\}$$

$$\therefore a \leq 2 \cdots \textcircled{B}$$



따라서,  $\textcircled{A}$ 과  $\textcircled{B}$ 을 동시에 만족시켜야 하므로  $1 \leq a \leq 2$

22. 두 명제  $p \rightarrow q$  와  $q \rightarrow r$  가 모두 참이면 명제  $p \rightarrow r$  도 참이 된다. 이 성질을 이용하여 다음을 구하여라.

네 조건  $p, q, r, s$  에 대하여  $p$  는  $r$  이기 위한 충분조건,  $q$  는  $r$  이기 위한 충분조건,  $s$  는  $r$  이기 위한 필요조건,  $q$  는  $s$  이기 위한 필요조건이다.

이 때,  $p$  는  $q$  이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 :                      조건

▷ 정답 : 충분조건

해설

$p \rightarrow r, q \rightarrow r, r \rightarrow s, s \rightarrow q$  가 참이다.  $p \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow q$  이므로  $p \Rightarrow q$  이다.  
 $\therefore p$  는  $q$  이기 위한 충분조건이다.

23. 다음은  $a \geq 0, b \geq 0$ 인 두 실수  $a, b$ 에 대하여  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 임을 증명한 것이다. 물음에 답하여라.

$$\begin{aligned} & [\text{㉞}] - [\text{㉝}] \\ &= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \quad [\text{㉜}] \end{aligned}$$

따라서,  $[\text{㉞}] \geq [\text{㉝}]$   
한편, 등호는  $[\text{㉜}]$ 일 때 성립한다.

위의 증명에서 ㉞, ㉝, ㉜, ㉜에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

- ① ㉞  $a+b$  ㉝  $\sqrt{ab}$  ㉜  $\geq 0$  ㉜  $a=0, b=0$

② ㉞  $\frac{a+b}{2}$  ㉝  $2\sqrt{ab}$  ㉜  $\leq 0$  ㉜  $a=0, b=0$

③ ㉞  $\frac{a+b}{2}$  ㉝  $\sqrt{ab}$  ㉜  $\geq 0$  ㉜  $a=b$

④ ㉞  $\sqrt{ab}$  ㉝  $a+b$  ㉜  $\geq 0$  ㉜  $a=b$

⑤ ㉞  $2\sqrt{ab}$  ㉝  $\frac{a+b}{2}$  ㉜  $\leq 0$  ㉜  $a=0, b=0$

해설

$$\begin{aligned} & \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \\ &= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2} \\ &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0 \\ \therefore \frac{a+b}{2} &\geq \sqrt{ab} \end{aligned}$$

한편, 등호는  $a=b$ 일 때 성립한다.

24. 다음  안에 알맞은 세 자연수의 합을 구하여라.

보기

㉠  $n(\{x|x \text{는 } \square \text{미만의 자연수}\}) = 4$

㉡  $n(\{a, b, c, d\}) - n(\{b, c, d\}) = \square$

㉢  $A \subset \{1, 2, 3\}$  이고,  $n(A) = 2$  를 만족하는 집합  $A$  의 개수는  개이다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

㉠  $n(\{x|x \text{는 } 5 \text{ 미만의 자연수}\}) = 4$

㉡  $n(\{a, b, c, d\}) - n(\{b, c, d\}) = 1$

㉢  $A \subset \{1, 2, 3\}$  이고,  $n(A) = 2$  를 만족하는 집합  $A$  는  $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$  의 3 개

$\therefore 5 + 1 + 3 = 9$



25. 두 집합  $A, B$ 가 다음과 같을 때,  $X \cap A = X, X \cup (A \cap B) = X$ 를 만족하는 집합  $X$ 의 개수는?

$A = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{ 이하의 자연수}\}, B = \{3, 5, 7\}$

- ① 2개      ② 4개      ③ 6개      ④ 8개      ⑤ 10개

해설

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A \cap B = \{3, 5\}, X \cap A = X$ 이므로  $X \subset A$

$X \cup (A \cap B) = X$ 이므로  $A \cap B \subset X$

$\{3, 5\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$

따라서 집합  $X$ 는 집합  $A$ 의 부분집합 중 원소 3, 5를 반드시 포함하는 집합이므로

$2^{5-2} = 2^3 = 8(\text{개})$

26. 두 집합  $A = \{5, 2a + 1, 11\}$ ,  $B = \{6 - a, 3a - 2, 13\}$ 에 대하여  $A \cap B = \{7\}$ 일 때,  $B - A$ 는?

- ①  $\{5, 7, 11\}$
- ②  $\{3, 7, 13\}$
- ③  $\{5, 11\}$
- ④  $\{3, 13\}$
- ⑤  $\{7\}$

해설

$A - B = \{7\}$ 이므로  $7 \in A$ ,  $7 \in B$ 이다.

$2a + 1 = 7 \quad \therefore a = 3$

$B = \{6 - 3, 3 \times 3 - 2, 13\} = \{3, 7, 13\}$

$B - A = \{3, 13\}$

27. 두 집합  $A, B$  에 대하여  $n(A) = 20$ ,  $n(B) = 16$ ,  $n(A \cup B) = 29$  일 때,  $n(A - B) - n(B - A)$  는?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 20 + 16 - 29 = 7$$

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 20 - 7 = 13$$

$$n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = 16 - 7 = 9$$

$$\therefore n(A - B) - n(B - A) = 13 - 9 = 4$$

28.  $x$ 가 실수일 때,  $\frac{x^2 - x + 1}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2}$ 의 최댓값은?

- ①  $-\frac{3}{2}$       ②  $-\frac{1}{2}$       ③  $\frac{1}{2}$       ④  $\frac{3}{2}$       ⑤ 2

해설

$$\begin{aligned}
 & x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2 \\
 &= x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 + 1 \\
 &= x^2 \left( x^2 - 2x + 3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) + 1 \\
 &= x^2 \left\{ x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \left( x + \frac{1}{x} \right) + 3 \right\} + 1 \\
 &= x^2 \left\{ \left( x + \frac{1}{x} \right)^2 - 2 \left( x + \frac{1}{x} \right) + 1 \right\} + 1 \\
 &= x^2 \left( x + \frac{1}{x} - 1 \right)^2 + 1 \\
 &= (x^2 - x + 1)^2 + 1 \\
 \therefore \text{준식} &= \frac{x^2 - x + 1}{(x^2 - x + 1)^2 + 1} \text{이고} \\
 x^2 - x + 1 &= \left( x^2 - x + \frac{1}{4} \right) + \frac{3}{4} \\
 &= \left( x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \text{이므로} \\
 x^2 - x + 1 &= t \text{로 치환 } t \geq \frac{3}{4} \text{하면} \\
 \text{준식} : \frac{t}{t^2 + 1} &= \frac{1}{\frac{t^2 + 1}{t}} = \frac{1}{t + \frac{1}{t}} \\
 \text{여기서 } t + \frac{1}{t} &\geq 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} = 2 \\
 (\because t &\geq \frac{3}{4}) \\
 \text{따라서 } \frac{t^{-1} + 1}{t} \text{의 최솟값은 } 2 \text{이고} \\
 \frac{t}{t^2 + 1} \text{의 최댓값은 } \frac{1}{2} \text{이다.}
 \end{aligned}$$