

1. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 중 적어도 하나의 홀수를 포함하는 부분집합의 개수를 구하시오.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 28 개

해설

전체의 부분집합에서 짝수만을 원소로 가지는 부분집합은 제외한다.

$$\therefore 2^5 - 2^2 = 28(\text{개})$$

2. 두 집합 A, B 에 대하여 $A = \{1, 2, a\}$, $A \cap B = \{2, 5\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 일 때, 집합 B 의 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$A \cap B = \{2, 5\}$ 이므로 집합 A 는 반드시 2 와 5 를 포함해야 한다.
따라서 $a = 5$ 이다.

집합 B 또한 $A \cap B = \{2, 5\}$ 에 의하여 원소 2 와 5 를 반드시 포함하고, 원소 1 은 포함하지 않는 집합이어야 한다.

$$\therefore B = \{2, 3, 4, 5\}$$

$$\therefore 2 + 3 + 4 + 5 = 14$$

3. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 보다 작은 자연수}\}$ 의 세 부분집합
 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 보다 작은 짝수}\}$,
 $B = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{ 의 약수}\}$,
 $C = \{x \mid x \text{는 } 4 \text{ 의 약수}\}$ 에 대하여 다음 집합 중 공집합인 것은?

① $A \cap B \cap C$

② $A \cap B^c$

③ $B \cap A^c$

④ $A \cap C^c$

⑤ $C \cap B^c$

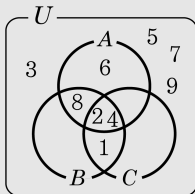
해설

집합 U, A, B, C 를 원소나열법으로 나타내면

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$A = \{2, 4, 6, 8\}, B = \{1, 2, 4, 8\}, C = \{1, 2, 4\} \text{ 이고,}$$

벤 다이어그램으로 나타내면 다음 그림과 같다.



① $A \cap B \cap C = \{2, 4\}$

② $A \cap B^c = \{6\}$

③ $B \cap A^c = \{1\}$

④ $A \cap C^c = \{6, 8\}$

⑤ $C \cap B^c = \emptyset$

4. 전제집합 $U = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 세 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 하자. $P = \{-1, 0, 1\}$, $Q = \{-1, a+3\}$, $R = \{2, 4, 2a+7\}$ 이고 $q \rightarrow p, p \rightarrow \sim r$ 가 항상 참일 때, a 의 값은?

① -3

② -2

③ -1

④ 0

⑤ 1

해설

$q \rightarrow p, p \rightarrow \sim r$ 가 참이므로 $Q \subset P, P \subset R^c$

$\therefore Q \subset P \subset R^c$

$\{-1, a+3\} \subset \{-1, 0, 1\} \subset \{2, 4, 2a+7\}^c$

$\{-1, a+3\} \subset \{-1, 0, 1\} \cdots \textcircled{A}$

$\textcircled{A}$ 에서 $a+3 = -1$ 또는 0 또는 1

$\therefore a = -4$ 또는 -3 또는 -2

$\{-1, 0, 1\} \subset \{2, 4, 2a+7\}^c \cdots \textcircled{B}$

$\textcircled{B}$ 에서 $2a+7 \neq -1, 0, 1$

$2a \neq -8, -7, -6$

$\therefore a \neq -4, -\frac{7}{2}, -3$

따라서 $\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 을 동시에 만족시키는 a 의 값은 -2 이다.

5. 자연수 n 에 대하여 ‘ n^2 이 짝수이면 n 도 짝수이다.’를 증명하는 과정이다. 이 때 괄호 안에 들어갈 알맞은 논리 중 틀린 것을 아래의 보기에서 고르면?

증명

주어진 명제의 (①)를 구하여 보면 n 이 (②)이면 n^2 도 (②)이다. 이 때 n 이 (②)이므로 $n =$ (③) (k 는 0 또는 자연수)
이 때 $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
 $\therefore n^2$ 은 (②)이다. 따라서, (①)가 (④)이므로 주어진 명제는 (⑤)이다.

① 대우

② 홀수

③ $2k + 1$

④ 거짓

⑤ 참

해설

대우가 참이면 주어진 명제도 참이다.

6. 두 조건 $p : -3 < 4x + 1 < 5$, $q : k < x < h$ 에 대하여 q 가 p 이기 위한 충분조건일 때, k 의 최솟값을 a , h 의 최댓값을 b 라 할 때, ab 의 값은?

① -4

② -3

③ -1

④ 2

⑤ 3

해설

$p : -3 < 4x + 1 < 5$, $q : k < x < h$ 에서

p 를 다시 정리해 보면

$p : -1 < x < 1$ 이 된다.

q 가 p 의 범위에 포함되어야 하므로 h 의 최댓값은 1, k 의 최솟값은 -1이 된다.

$$a = -1, b = 1$$

$$\therefore ab = -1$$

7. 집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수가 24 개일 때, 집합 X 의 부분집합의 개수를 구하면?

① 12

② 16

③ 24

④ 32

⑤ 36

해설

집합 X, Y 의 원소의 개수가

$n(X) = n(Y) = n$ 일 때,

집합 X 에서 Y 로의 일대일 대응의 개수는

$n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ (개)이다.

문제에서 일대일 대응의 개수가 24 이므로

$$\therefore n = 4$$

$\therefore$ 집합 X 의 부분집합의 개수는

$$2^n = 2^4 = 16(\text{개})$$

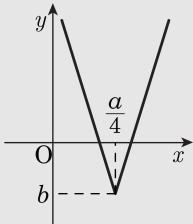
8. 함수 $f(x) = |4x - a| + b$ 는 $x = 3$ 일 때 최솟값 -2 를 가진다. 이 때, 상수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$f(x) = |4x - a| + b = \left| 4 \left(x - \frac{a}{4} \right) \right| + b$ 의 그래프는 $y = |4x|$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\frac{a}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한 것이므로 다음 그림과 같다.



따라서, $x = \frac{a}{4}$ 일 때 최솟값 b 를 가지므로

$$\frac{a}{4} = 3, b = -2$$

$$\therefore a = 12, b = -2 \quad \therefore a + b = 10$$

9. $a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}} = \frac{25}{9}$ 일 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하면?

① 5

② 7

③ 8

④ 16

⑤ 34

해설

$$\begin{aligned} \frac{25}{9} &= 2 + \frac{7}{9} = 2 + \frac{1}{\frac{9}{7}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{2}{7}} \\ &= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{7}{2}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

$$\therefore a = 2, b = 1, c = 3, d = 2$$

$$\therefore a + b + c + d = 8$$

10. $\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}} = -\sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$ 일 때, 방정식 $|x-3| - |x+2| = -1$ 의 해를 구하면?

① -1

② 0

③ 1

④ 5

⑤ 6

해설

$$x+3 \geq 0, x-2 < 0 \rightarrow -3 \leq x < 2$$

$$-(x-3) - (x+2) = -2x + 3 - 2 = -1$$

$$\therefore x = 1$$

11. 분수함수 $y = \frac{x-1}{x-2}$ 의 그래프가 직선 $y = -x + a$ 에 대하여 대칭일 때, 상수 a 의 값을 구하면?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

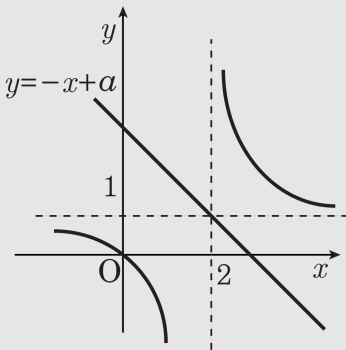
⑤ 3

해설

$$y = \frac{x-1}{x-2} = \frac{(x-2)+1}{x-2} = \frac{1}{x-2} + 1$$

즉, 점근선이 $x = 2$, $y = 1$ 인 분수함수이므로 그래프는 다음 그림과 같다.

이 그래프가 직선 $y = -x + a$ 에 대하여 대칭이 되려면 직선 $y = -x + a$ 가 두 점근선의 교점인 $(2, 1)$ 을 지나야 하므로
 $1 = -2 + a$
 $\therefore a = 3$



12. x 에 대한 방정식 $\sqrt{2x} = m(x+1)$ 이 서로 다른 두 실근을 가질 때, 상수 m 의 값의 범위는 $\alpha < m < \beta$ 이다. 이때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{4}$

② $\frac{1}{2}$

③ 1

④ $\frac{3}{4}$

⑤ 2

해설

방정식 $\sqrt{2x} = m(x+1)$ 의 해는

두 그래프 $y = \sqrt{2x}$ 와 $y = m(x+1)$ 의 교점의 x 좌표이다.

이때, 직선 $y = m(x+1)$ 은 m 의 값에 관계없이

점 $(-1, 0)$ 을 지난다.

$y = \sqrt{2x}$ 의 그래프와 직선 $y = m(x+1)$ 이

서로 다른 두 점에서 만나려면 $m > 0$ 이고,

m 은 두 그래프가 접할 때의 기울기보다 작아야 한다.

$\sqrt{2x} = m(x+1)$ 의 양변을 제곱하면

$$2x = m^2(x+1)^2$$

$$m^2x^2 + 2(m^2 - 1)x + m^2 = 0$$

이 방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (m^2 - 1)^2 - m^4 = 0$$

$$-2m^2 + 1 = 0, m^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore m = \frac{1}{\sqrt{2}} (\because m > 0)$$

따라서, m 의 값의 범위는 $0 < m < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 이므로

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{2}$$

13. 지윤이네 학교 학생 170 명 중 A 문제를 푼 학생이 80 명, B 문제를 푼 학생이 90 명, A 문제와 B 문제를 모두 푼 학생이 15 명일 때, A 문제와 B 문제 중 어느 것도 풀지 못한 학생은 몇 명인가?

① 10 명

② 12 명

③ 14 명

④ 15 명

⑤ 16 명

해설

전체집합을 U , A 문제를 푼 학생들의 집합을 A , B 문제를 푼 학생들의 집합을 B 라고 하면

$$n(U) = 170$$

$$n(A) = 80, n(B) = 90, n(A \cap B) = 15$$

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 80 + 90 - 15 \\ &= 155 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n((A \cup B)^c) &= n(U) - n(A \cup B) \\ &= 170 - 155 \\ &= 15 \end{aligned}$$

14. 전체집합 $U = \{x|x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$ 의 두 부분집합 $B = \{1, 3, 5, 9\}$, A 에 대하여 집합 $(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = \{1, 3, 9, 10\}$ 를 만족하는 집합 A 는?

① $\{2, 5\}$

② $\{5, 7\}$

③ $\{5, 10\}$

④ $\{5, 7, 9\}$

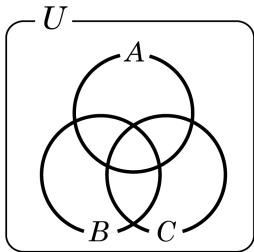
⑤ $\{5, 9, 10\}$

해설

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $B = \{1, 3, 5, 9\}$, $(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 3, 9, 10\}$ 이므로 $A \cap B = \{5\}$ 이다.

따라서 집합 $A = \{5, 10\}$ 이다.

15. 집합 A, B, C 가 전체집합 U 의 부분집합으로서 다음 그림과 같이 주어졌다. 두 집합 P, Q 에 대하여 $P \circ Q$ 를 $P \circ Q = (P - Q) \cup (Q - P^c)$ 와 같이 정의할 때, $A \circ A$ 의 값을 구하면?



① A

② B

③ C

④ $\emptyset$

⑤ $A - B$

해설

$P \circ Q = (P - Q) \cup (Q - P^c)$ 이므로

$A \circ A = (A - A) \cup (A - A^c) = \emptyset \cup A = A$ 이다.

16. 세 조건 p, q, r 의 진리집합을 각각 P, Q, R 라 하면 $P \cup Q = P$, $P \cap R = \emptyset$ 인 관계가 성립한다. 이 때, 다음 중 반드시 참이라고 할 수 없는 것은?

① $p \rightarrow \sim r$

② $\sim p \rightarrow \sim q$

③ $q \rightarrow r$

④ $q \rightarrow \sim r$

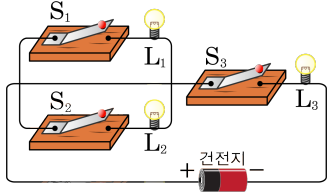
⑤ $r \rightarrow \sim p$

해설

$$P \cup Q = P \Rightarrow Q \subset P \Rightarrow q \rightarrow p \Leftrightarrow \sim p \rightarrow \sim q$$

$$P \cap R = \emptyset \Rightarrow p \rightarrow \sim r \Leftrightarrow r \rightarrow \sim p \quad q \rightarrow p, p \rightarrow \sim r \text{ 이므로 } q \rightarrow \sim r$$

17. 다음 그림과 같은 스위치 회로에 대하여 보기에서 옳은 것을 모두 고른 것은?



보기

- ㉠ 스위치 S_1, S_2, S_3 가 모두 닫히는 것은 전구 L_1 이 켜지기 위한 충분조건이다.
- ㉡ 스위치 S_2 와 S_3 가 모두 닫히는 것은 전구 L_3 가 켜지기 위한 필요조건이다.
- ㉢ 스위치 S_2 또는 S_3 가 닫히는 것은 전구 L_2 와 L_3 가 모두 켜지기 위한 필요충분 조건이다.

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉡

⑤ ㉡, ㉢

해설

㉡ 충분

㉢ 관계성립하는 경우가 아님

18. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하자. $\sim q$ 가 p 이기 위한 필요조건일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $P^c \subset Q$

② $Q \subset P$

③ $Q - P = \phi$

④ $P - Q = P$

⑤ $P - Q = \phi$

해설

$p \rightarrow \sim q$ 이므로 진리집합으로 표현하면, $P \subset Q^c$ 이다.

즉, $P \cap Q^c = P \Rightarrow P - Q = P$

19. $f(x) = 3x + 2$ 에서 $g(x)$ 가 $(g \circ f)^{-1}(x) = 3x$ 를 만족시킨다고 할 때, $g(2)$ 의 값은?

① 1

② 0

③ $\frac{1}{3}$

④ 3

⑤ 6

해설

$$(g \circ f)^{-1}(x) = 3x \text{ 이므로 } (g \circ f)(3x) = x$$

$$3x = t \text{ 로 치환하면 } x = \frac{1}{3}t \Rightarrow (g \circ f)(t) = \frac{1}{3}t$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 2) = \frac{1}{3}x$$

$$3x + 2 = 2 \text{ 일 때 } x = 0$$

$$\therefore g(2) = 0$$

20. 집합 $A_n = \{x | x \text{는 } n \text{의 약수, } n \text{은 자연수}\}$ 일 때, $(A_n \cup A_6^c)^c \cup A_n = A_6$ 을 만족하는 자연수 n 의 값을 모두 찾아라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : 3

▷ 정답 : 6

해설

$$(A_n \cup A_6^c)^c \cup A_n = (A_n^c \cap A_6) \cup A_n = (A_6 - A_n) \cup A_n$$

위의 식을 보면,

$A_n \subset A_6$ 이므로,

6의 약수의 집합에 포함될 수 있는 약수의 집합은 1, 2, 3, 6

21. 분수식 $\frac{(x+3)\sqrt{8+2x-x^2}}{x^2-3x+2}$ 이 실수가 되기 위한 정수 x 값들의 총합은?

① 1

② 2

③ 4

④ 6

⑤ 8

해설

$$8 + 2x - x^2 \geq 0 \text{에서 } x^2 - 2x - 8 \leq 0$$

$$(x+2)(x-4) \leq 0$$

$$\therefore -2 \leq x \leq 4$$

$$(i) \text{ 분모} = (x-1)(x-2) \neq 0 \text{에서 } x \neq 1, 2$$

$$(ii) \text{ 분자} = x+3=0 \text{에서 } x=-3$$

$$\therefore \text{정수 } x = -3, -2, -1, 0, 3, 4 \text{이고}$$

$$(\text{합}) = -3 - 2 - 1 + 0 + 3 + 4 = 1$$