1. 함수 $f(x)=\begin{cases}2(x\geq 1)\\1(x<1)\end{cases}$ 에서 $y=(f\circ f)(x)$의 식을 구하여라.

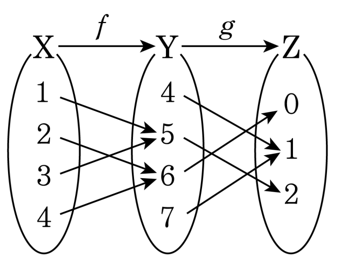
▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

ⅰ) $x\geq 1$: $y=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(2)=2$
ⅱ) $x<1$: $y=(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(1)=2$
$\therefore$ $y=(f\circ f)(x)=2$

2. 아래 그림과 같이 주어진 함수 f, g에 대하여 $(g \circ f)(3)$의 값을 구하면?



① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(5) = 2$

3. 두 함수 $f(x)=2x+3$, $g(x)=ax-1$에 대하여 $f\circ g=g\circ f$일 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{2}{3}$

해설

$f\circ g=g\circ f$에서 $2ax+1=2ax+3a-1$

$\therefore\ a=\frac{2}{3}$

4. 함수 $f(x)$가 $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{x-2}{x+2}$ 를 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값은 얼마인가?

① 0 ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ 1 ⑤ 5

해설

$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{x-2}{x+2}$ 에서

$f(2)$ 를 구해야 하므로

$\frac{x+1}{x-1}=2$ 인 x 를 구하여 대입한다.

즉, $x+1=2x-2$ 에서 $x=3$

$\therefore\ f(2)=\frac{3-2}{3+2}=\frac{1}{5}$

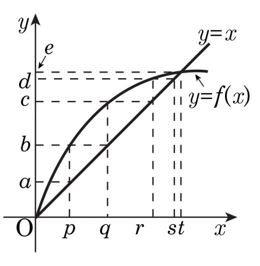
5. $f(x) = x + 1$, $g(x) = 3x - 2$ 일 때, $(g \circ h)(x) = f(x)$ 를 만족시키는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x) = \frac{1}{3}x + 1$
② $h(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$
③ $h(x) = x + \frac{1}{3}$
④ $h(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$
⑤ $h(x) = \frac{2}{3}x + 1$

해설

$f(x) = x + 1$, $g(x) = 3x - 2$ 일 때,
$(g \circ h)(x) = f(x)$ 를 만족해야 하므로
$(g \circ h)(x) = g(h(x)) = 3h(x) - 2$
$3h(x) - 2 = x + 1$, $3h(x) = x + 3$
$\therefore h(x) = \frac{1}{3}x + 1$

6. 림은 $y = f(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프이다. 이를 이용하여 $(f \circ f)(x) = d$ 를 만족시키는 x 의 값은 얼마인가?



① p ② q ③ r

④ s ⑤ t

해설

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = d \cdots\cdots$ ㉠

그런데, 주어진 그래프에서 $f(r) = d$ 이므로

㉠에서 $f(x) = r$

$\therefore r = c$ 에서 $f(x) = r = c$

$\therefore x = q$

7. 실수 전체 집합에서 정의된 함수 f에 대하여 $f(3x+2) = 6x-3$이다. 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g(3)$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$f(3x+2) = 6x-3$에서 $3x+2 = t$라 하면

$f(t) = 2t-7$이므로 $f(x) = 2x-7$

$\therefore g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

$\therefore g(3) = \frac{3}{2} + \frac{7}{2} = 5$

8. 함수 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$ 에 대하여 $f(g(x))=g(f(x))=x$ 를 만족하는 함수 $g(x)$ 를 구하면?

① $g(x)=\dfrac{2x+1}{x-2}$ ② $g(x)=\dfrac{2x-1}{x-2}$

③ $g(x)=\dfrac{-2x+1}{x-2}$ ④ $g(x)=\dfrac{-2x-1}{x-2}$

⑤ $g(x)=\dfrac{x-2}{-2x-1}$

해설

$f(g(x))=g(f(x))=x$ 에서 $g=f^{-1}$ 이므로

$g(x)$ 는 $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ 의 역함수이다.

$(x+2)y=2x-1$, $x(y-2)=-2y-1$

$x=\dfrac{-2y-1}{y-2}$

$\therefore\ g(x)=\dfrac{-2x-1}{x-2}$

9. $f(x) = \begin{cases} x(x \leq 0) \\ x^2(x > 0) \end{cases}$, $g(x) = f(x+4)$ 로 정의한다. $h(x) = g^{-1}(x)$ 라 할 때, $h(0)$ 의 값은 ?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$h(0) = g^{-1}(0) = k$

$g(k) = f(k+4) = 0$

$\therefore\ k + 4 = 0$

$\therefore\ k = -4$

$\therefore\ h(0) = -4$

10. 두 함수 $f(x) = -2x+3$, $g(x) = 3x+1$ 에 대하여 $(g\circ(f\circ g)^{-1}\circ f^{-1})(5)$ 의 값을 구하시오.

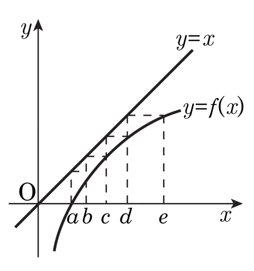
▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ f^{-1})(5)$
$= (g \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) \circ f^{-1})(5)$
$= (g \circ g^{-1}) \circ (f^{-1} \circ f^{-1})(5)$
$= (f^{-1} \circ f^{-1})(5)$
$= f^{-1} \circ (f^{-1}(5))$
$f^{-1}(5) = k$ 로 놓으면 $f(k) = -2k + 3 = 5$
$\therefore k = -1$
$\therefore$ (준식) $= f^{-1}(f^{-1}(5)) = f^{-1}(k) = f^{-1}(-1)$
$f^{-1}(-1) = l$ 로 놓으면
$f(l) = -2l + 3 = -1$
$\therefore\ l = 2$
$\therefore$ (준식) $= f^{-1}(-1) = l = 2$

11. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(f \circ f)^{-1}(b)$ 의 값을 구하면?



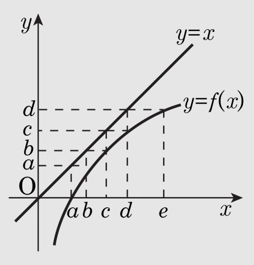
① a　② b　③ c　④ d　⑤ e

해설

$(f \circ f)^{-1}(b) = (f^{-1} \circ f^{-1})(b)$

$= f^{-1}(f^{-1}(b))$ 이므로

$f^{-1}(b) = m$ 이라고 하면



$f(m) = b$ 다음 그래프에서 $f(c) = b$ 이므로 $m = f^{1}(b) = c$

$\therefore f^{-1}(f^{-1}(b)) = f^{-1}(c)$

$f^{-1}(c) = n$ 이라고 하면

$f(n) = c$ 그래프에서 $f(d) = c$ 이므로

$n = f^{-1}(c) = d$

$\therefore (f \circ f)^{-1}(b) = d$

12. 점 $(6, -2)$를 지나는 일차함수 $y = f(x)$의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$의 그래프가 일치할 때, $f(-1)$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$f = f^{-1}$이므로 $(f \circ f)(x) = x$
$f(x) = a(x-6) - 2 = ax - 6a - 2 (a \neq 0)$로 놓으면
$f(f(x)) = a(ax - 6a - 2) - 6a - 2 = x$
$\therefore a^2x - 6a^2 - 8a - 2 = x$
즉, $a^2 = 1$, $-6a^2 - 8a - 2 = 0$이므로 $a = -1$
따라서 $f(x) = -x + 4$이므로
$f(-1) = -(-1) + 4 = 5$

13. 다음 보기의 함수 $f(x)$ 중 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $f(x) = x+1$ ㉡ $f(x) = -x$

㉢ $f(x) = -x+1$

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

㉠. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(x+1))$
$= f((x+1)+1) = f(x+2)$
$= (x+2)+1 = x+3$
$\therefore (f \circ f \circ f)(x) \neq f(x)$

㉡. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(-x))$
$= f(-(-x)) = f(x)$

㉢. $(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(f(-x+1))$
$= f(-(-x+1)+1) = f(x)$

따라서 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것은 ㉡, ㉢ 이다.

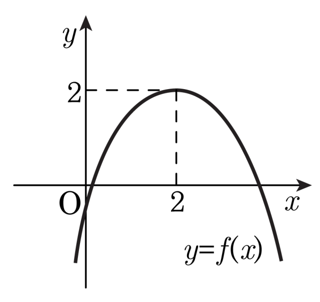
14. 함수 $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ 에 대하여 $f^9\left(\dfrac{1}{2}\right) + f^{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하면?
(단, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f^{n-1} \circ f$ 이다.)

① $\dfrac{80}{399}$ ② $\dfrac{82}{399}$ ③ $\dfrac{83}{399}$ ④ $\dfrac{85}{399}$ ⑤ $\dfrac{86}{399}$

해설

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(\frac{x}{x+1}) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1}$$
$$= \frac{x}{2x+1}$$
$$f^3(x) = f(f^2(x)) = f(\frac{x}{2x+1}) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1}$$
$$= \frac{x}{3x+1}$$
$$f^4(x) = f(f^3(x)) = f(\frac{x}{3x+1}) = \frac{\frac{x}{3x+1}}{\frac{x}{3x+1}+1}$$
$$= \frac{x}{4x+1}$$
이제 $f^{n-1}(x) = \dfrac{x}{(n-1)x+1}$ 라고 놓으면
$$f^n(x) = f(f^{n-1}(x)) = f\left(\frac{x}{(n-1)x+1}\right)$$
$$= \frac{\frac{x}{(n-1)x+1}}{\frac{x}{(n-1)x+1}+1} = \frac{x}{(n-1)x+1+x}$$
$$= \frac{x}{nx+1}$$
$$\therefore\ f^9(2) + f^{10}(2) = \frac{2}{9 \cdot 2+1} + \frac{2}{10 \cdot 2+1} = \frac{80}{399}$$

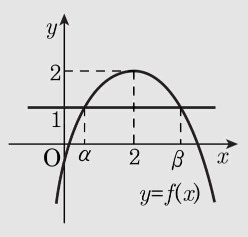
15. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



① 없다　　② 1 개　　③ 2 개　　④ 3 개　　⑤ 4 개

해설

$(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하므로 $f(f(x)) = 1$
$f(x) = t$ 라 놓고 $f(t) = 1$ 을 만족하는 t 의 값을 $\alpha, \beta(\alpha < \beta)$ 라 하면
$0 < \alpha < 2 < \beta$ 이다.
이 때, $f(x) = \alpha$ 를 만족하는 x 의 값은 2 개이지만
$f(x) = \beta$ 를 만족하는 근은 없다.



따라서, $(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하는 x 의 값은 2 개이다.

16. $X = \{x \mid x \geq k\}$ 를 정의역으로 하는 함수 $f(x) = |x^2 - 1|$ 의 역함수가 존재할 때, 실수 k 의 최솟값을 구하여라.

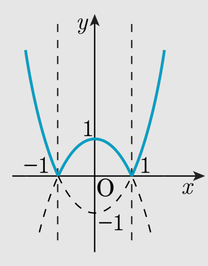
▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^2 - 1 \geq 0$ 이면 $x \leq -1,\ x \geq 1$, $x^2 - 1 < 0$ 이면 $-1 < x < 1$

따라서, $f(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1(x \leq -1,\ x \geq 1) \\ 1 - x^2(-1 < x < 1) \end{cases}$



$y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로 함수 $f(x)$ 가 일대일대응이 되는 정의역은

$\{x \mid x \geq 1\}$ 또는 $\{x \mid x \leq -1\}$

또는 $\{x \mid -1 \leq x \leq 0\}$ 또는 $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$

즉, $X = \{x \mid x \geq k\}$ 를 정의역으로 하려면 k 의 최솟값은 1이다.

17. 두 함수 $f(x)=x+1,\ g(x)=\sqrt{x}$ 에 대하여 $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

$g^{-1}(x)=x^2$ 이므로

$$\begin{aligned}(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ f)(2) &= (f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ f)(2)\\ &= (g^{-1}\circ f)(2)\\ &= g^{-1}(f(2))\\ &= g^{-1}(3)\\ &= 9\end{aligned}$$

18. 자연수 x에 대하여 함수 $f(x)$를

$f(x) = \begin{cases} x+1 \ (x\text{는 홀수}) \\ \dfrac{x}{2} (x\text{는 짝수}) \end{cases}$ 로 정의할 때, $f(f(x)) = 2$ 를 만족시키는 x의 값들의 합은?

① 9　　② 11　　③ 13　　④ 15　　⑤ 17

해설

$f(f(x)) = 2$에서 $f(x) = a$로 놓으면 $f(a) = 2$

i) a가 홀수일 때 $f(a) = a + 1 = 2$

$\therefore a = 1$

ii) a가 짝수일 때 $f(a) = \dfrac{a}{2} = 2 \ \therefore a = 4$

i), ii)에서 $f(x) = 1 \ or \ f(x) = 4$

iii) $f(x) = 1$일 때 x가 홀수이면 존재하지 않고

x가 짝수이면 $x = 2$

iv) $f(x) = 4$일 때 x가 홀수이면 $x = 3$

x 가 짝수이면 $x = 8$

$\therefore f(f(x)) = 2$ 를 만족하는 x 값은 $x = 2,\ 3,\ 8$

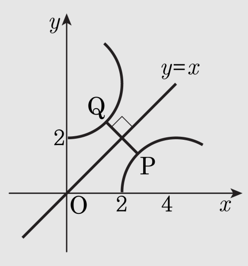
$\therefore 2 + 3 + 8 = 13$

19. 함수 $f(x) = \sqrt{x-2}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. 점 P 는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위를 움직이고, 점 Q 는 $y = g(x)$ 의 그래프 위를 움직인다. 이 때, 두 점 $P,\ Q$ 사이의 거리의 최솟값을 구하면?

① $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{7\sqrt{2}}{4}$ ④ $\frac{9\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

해설

우선, $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 를 구하자.
$f(x) = \sqrt{x-2}$ 라 하면 $y^2 = x - 2$
$\therefore\ x = y^2 + 2$
위 식의 x 와 y 를 바꾸면 $y = x^2 + 2$
$\therefore\ f^{-1}(x) = g(x) = x^2 + 2$
한편, 함수 $f(x)$와 $g(x)$는 역함수 관계이므로
직선 $y = x$에 대칭이다.



또, P, Q 사이의 거리가 최소가 되는 것은
선분 PQ와 직선 $y = x$가 수직을 이룰 때이다.
동점 P , Q 사이의 거리의 최솟값은 점 Q 와 직선 $y = x$ 사이의 거리의 최솟값의 2 배이다. 동점 $Q(a,\ a^2 + 2)$ 라 놓고
직선 $y = x$ 와 점 Q 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|\,a - (a^2+2)\,|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\left|-\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{4}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{\left|\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}\right|}{\sqrt{2}}$$

거리 d 의 최솟값은 $a = \frac{1}{2}$ 일 때

$\frac{\frac{7}{4}}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{8}$ 이므로

두 점 $P,\ Q$ 사이의 거리의 최소값은

$\therefore\ \frac{7\sqrt{2}}{8} \times 2 = \frac{7\sqrt{2}}{4}$