

1. 함수 $f(x) = \begin{cases} 2(x \geq 1) \\ 1(x < 1) \end{cases}$ 에서 $y = (f \circ f)(x)$ 의 식을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

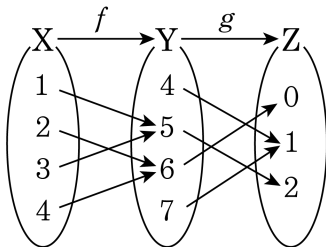
해설

$$\text{i) } x \geq 1 : y = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2) = 2$$

$$\text{ii) } x < 1 : y = (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(1) = 2$$

$$\therefore y = (f \circ f)(x) = 2$$

2. 아래 그림과 같이 주어진 함수 f, g 에 대하여 $(g \circ f)(3)$ 의 값을 구하면?



① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(5) = 2$$

3. 두 함수 $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = ax - 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 일 때, 상수 a 의 값은?

① $\frac{2}{3}$

② $\frac{1}{3}$

③ 1

④ $-\frac{1}{3}$

⑤ $-\frac{2}{3}$

해설

$$f \circ g = g \circ f \text{에서 } 2ax + 1 = 2ax + 3a - 1$$

$$\therefore a = \frac{2}{3}$$

4. 함수 $f(x)$ 가 $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{x-2}{x+2}$ 를 만족시킬 때, $f(2)$ 의 값은 얼마인가?

- ① 0 ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ 1 ⑤ 5

해설

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{x-2}{x+2} \text{ 에서}$$

$f(2)$ 를 구해야 하므로

$$\frac{x+1}{x-1} = 2 \text{ 인 } x \text{ 를 구하여 대입한다.}$$

$$\text{즉, } x+1 = 2x-2 \text{ 에서 } x=3$$

$$\therefore f(2) = \frac{3-2}{3+2} = \frac{1}{5}$$

5. $f(x) = x + 1$, $g(x) = 3x - 2$ 일 때, $(g \circ h)(x) = f(x)$ 를 만족시키는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x) = \frac{1}{3}x + 1$

② $h(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

③ $h(x) = x + \frac{1}{3}$

④ $h(x) = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$

⑤ $h(x) = \frac{2}{3}x + 1$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x + 1, g(x) = 3x - 2 \text{ 일 때,} \\ (g \circ h)(x) &= f(x) \text{ 를 만족해야 하므로} \\ (g \circ h)(x) &= g(h(x)) = 3h(x) - 2 \\ 3h(x) - 2 &= x + 1, 3h(x) = x + 3 \\ \therefore h(x) &= \frac{1}{3}x + 1 \end{aligned}$$

6. 림은 $y = f(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프이다. 이를 이용하여 $(f \circ f)(x) = d$ 를 만족시키는 x 의 값은 얼마인가?

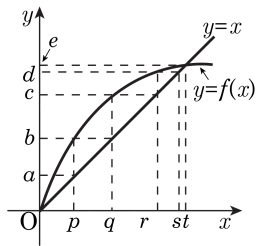
① p

② q

③ r

④ s

⑤ t



해설

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = d \dots \dots \textcircled{7}$$

그런데, 주어진 그래프에서 $f(r) = d$ 이므로

$$\textcircled{7} \text{에서 } f(x) = r$$

$$\therefore r = c \text{ 에서 } f(x) = r = c$$

$$\therefore x = q$$

7. 실수 전체 집합에서 정의된 함수 f 에 대하여 $f(3x+2) = 6x-3$ 이다.
함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $g(3)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$f(3x+2) = 6x-3$ 에서 $3x+2 = t$ 라 하면

$f(t) = 2t-7$ 이므로 $f(x) = 2x-7$

$$\therefore g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$$

$$\therefore g(3) = \frac{3}{2} + \frac{7}{2} = 5$$

8. 함수 $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ 에 대하여 $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ 를 만족하는 함수 $g(x)$ 를 구하면?

① $g(x) = \frac{2x+1}{x-2}$
③ $g(x) = \frac{-2x+1}{x-2}$
⑤ $g(x) = \frac{x-2}{-2x-1}$

② $g(x) = \frac{2x-1}{x-2}$
④ $g(x) = \frac{-2x-1}{x-2}$

해설

$f(g(x)) = g(f(x)) = x$ 에서 $g = f^{-1}$ 이므로

$g(x)$ 는 $y = \frac{2x-1}{x+2}$ 의 역함수이다.

$$(x+2)y = 2x-1, \quad x(y-2) = -2y-1$$

$$x = \frac{-2y-1}{y-2}$$

$$\therefore g(x) = \frac{-2x-1}{x-2}$$

9. $f(x) = \begin{cases} x(x \leq 0) \\ x^2(x > 0) \end{cases}$, $g(x) = f(x+4)$ 로 정의한다. $h(x) = g^{-1}(x)$

라 할 때, $h(0)$ 의 값은 ?

① -4

② -2

③ 0

④ 2

⑤ 4

해설

$$h(0) = g^{-1}(0) = k$$

$$g(k) = f(k+4) = 0$$

$$\therefore k+4 = 0$$

$$\therefore k = -4$$

$$\therefore h(0) = -4$$

10. 두 함수 $f(x) = -2x+3$, $g(x) = 3x+1$ 에 대하여 $(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ f^{-1})(5)$ 의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

$$(g \circ (f \circ g)^{-1} \circ f^{-1})(5)$$

$$= (g \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) \circ f^{-1})(5)$$

$$= (g \circ g^{-1}) \circ (f^{-1} \circ f^{-1})(5)$$

$$= (f^{-1} \circ f^{-1})(5)$$

$$= f^{-1} \circ (f^{-1}(5))$$

$$f^{-1}(5) = k \text{ 로 놓으면 } f(k) = -2k + 3 = 5$$

$$\therefore k = -1$$

$$\therefore (\text{준식}) = f^{-1}(f^{-1}(5)) = f^{-1}(k) = f^{-1}(-1)$$

$$f^{-1}(-1) = l \text{ 로 놓으면}$$

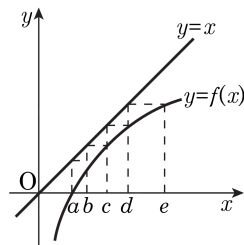
$$f(l) = -2l + 3 = -1$$

$$\therefore l = 2$$

$$\therefore (\text{준식}) = f^{-1}(-1) = l = 2$$

11. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(f \circ f)^{-1}(b)$ 의 값을 구하면?

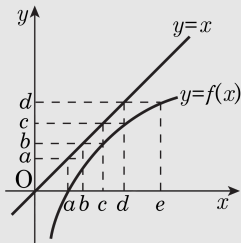
- ① a ② b ③ c ④ d ⑤ e



해설

$$(f \circ f)^{-1}(b) = (f^{-1} \circ f^{-1})(b) \\ = f^{-1}(f^{-1}(b)) \text{ 이므로}$$

$f^{-1}(b) = m$ 이라고 하면



$f(m) = b$ 다음 그래프에서 $f(c) = b$ 이므로 $m = f^{-1}(b) = c$

$$\therefore f^{-1}(f^{-1}(b)) = f^{-1}(c)$$

$f^{-1}(c) = n$ 이라고 하면

$f(n) = c$ 그래프에서 $f(d) = c$ 이므로

$$n = f^{-1}(c) = d$$

$$\therefore (f \circ f)^{-1}(b) = d$$

12. 점 $(6, -2)$ 를 지나는 일차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치할 때, $f(-1)$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$f = f^{-1}$ 이므로 $(f \circ f)(x) = x$

$f(x) = a(x - 6) - 2 = ax - 6a - 2 (a \neq 0)$ 로 놓으면

$f(f(x)) = a(ax - 6a - 2) - 6a - 2 = x$

$\therefore a^2x - 6a^2 - 8a - 2 = x$

즉, $a^2 = 1$, $-6a^2 - 8a - 2 = 0$ 이므로 $a = -1$

따라서 $f(x) = -x + 4$ 이므로

$f(-1) = -(-1) + 4 = 5$

13. 다음 보기의 함수 $f(x)$ 중 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $f(x) = x + 1$

㉡ $f(x) = -x$

㉢ $f(x) = -x + 1$

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉡, ㉢

해설

$$\begin{aligned}\text{㉠. } (f \circ f \circ f)(x) &= f(f(f(x))) = f(f(x+1)) \\ &= f((x+1)+1) = f(x+2) \\ &= (x+2)+1 = x+3 \\ \therefore (f \circ f \circ f)(x) &\neq f(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{㉡. } (f \circ f \circ f)(x) &= f(f(f(x))) = f(f(-x)) \\ &= f(-(-x)) = f(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{㉢. } (f \circ f \circ f)(x) &= f(f(f(x))) = f(f(-x+1)) \\ &= f(-(-x+1)+1) = f(x)\end{aligned}$$

따라서 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것은 ㉡, ㉢ 이다.

14. 함수 $f(x) = \frac{x}{x+1}$ 에 대하여 $f^9\left(\frac{1}{2}\right) + f^{10}\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하면?
(단, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f^{n-1} \circ f$ 이다.)

① $\frac{80}{399}$

② $\frac{82}{399}$

③ $\frac{83}{399}$

④ $\frac{85}{399}$

⑤ $\frac{86}{399}$

해설

$$f^2(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1} + 1}$$

$$= \frac{x}{2x+1}$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = f\left(\frac{x}{2x+1}\right) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1} + 1}$$

$$= \frac{x}{3x+1}$$

$$f^4(x) = f(f^3(x)) = f\left(\frac{x}{3x+1}\right) = \frac{\frac{x}{3x+1}}{\frac{x}{3x+1} + 1}$$

$$= \frac{x}{4x+1}$$

이제 $f^{n-1}(x) = \frac{x}{(n-1)x+1}$ 라고 놓으면

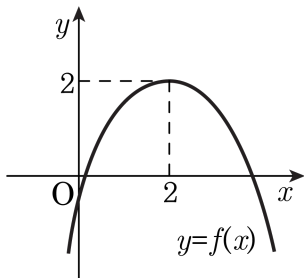
$$f^n(x) = f(f^{n-1}(x)) = f\left(\frac{x}{(n-1)x+1}\right)$$

$$= \frac{\frac{x}{(n-1)x+1}}{\frac{x}{(n-1)x+1} + 1} = \frac{x}{(n-1)x+1+x}$$

$$= \frac{x}{nx+1}$$

$$\therefore f^9(2) + f^{10}(2) = \frac{2}{9 \cdot 2 + 1} + \frac{2}{10 \cdot 2 + 1} = \frac{80}{399}$$

15. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $(f \circ f)(x) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



① 없다

② 1 개

③ 2 개

④ 3 개

⑤ 4 개

해설

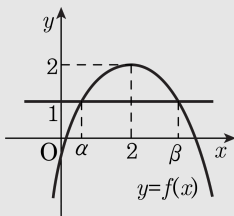
$(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하므로 $f(f(x)) = 1$

$f(x) = t$ 라 놓고 $f(t) = 1$ 을 만족하는 t 의 값을 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 하면

$0 < \alpha < 2 < \beta$ 이다.

이 때, $f(x) = \alpha$ 를 만족하는 x 의 값은 2개이지만

$f(x) = \beta$ 를 만족하는 근은 없다.



따라서, $(f \circ f)(x) = 1$ 을 만족하는 x 의 값은 2개이다.

16. $X = \{x \mid x \geq k\}$ 를 정의역으로 하는 함수 $f(x) = |x^2 - 1|$ 의 역함수가 존재할 때, 실수 k 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 1

해설

$x^2 - 1 \geq 0$ 이면 $x \leq -1, x \geq 1, x^2 - 1 < 0$
이면 $-1 < x < 1$

따라서, $f(x) = |x^2 - 1| =$

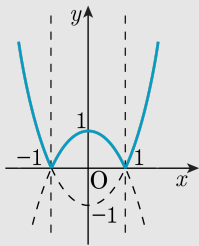
$$\begin{cases} x^2 - 1 (x \leq -1, x \geq 1) \\ 1 - x^2 (-1 < x < 1) \end{cases}$$

$y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같으므로
 함수 $f(x)$ 가 일대일대응이 되는 정의역은

$\{x \mid x \geq 1\}$ 또는 $\{x \mid x \leq -1\}$

또는 $\{x \mid -1 \leq x \leq 0\}$ 또는 $\{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$

즉, $X = \{x \mid x \geq k\}$ 를 정의역으로 하려면 k 의 최솟값은 1이다.



17. 두 함수 $f(x) = x + 1$, $g(x) = \sqrt{x}$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$g^{-1}(x) = x^2$ 이므로

$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(2) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(2) \\ &= (g^{-1} \circ f)(2) \\ &= g^{-1}(f(2)) \\ &= g^{-1}(3) \\ &= 9\end{aligned}$$

18. 자연수 x 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (x \text{는 홀수}) \\ \frac{x}{2} & (x \text{는 짝수}) \end{cases} \quad \text{로 정의할 때, } f(f(x)) = 2 \text{ 를 만족시키}$$

는 x 의 값들의 합은?

① 9

② 11

③ 13

④ 15

⑤ 17

해설

$f(f(x)) = 2$ 에서 $f(x) = a$ 로 놓으면 $f(a) = 2$

i) a 가 홀수일 때 $f(a) = a + 1 = 2$

$\therefore a = 1$

ii) a 가 짝수일 때 $f(a) = \frac{a}{2} = 2 \therefore a = 4$

i), ii)에서 $f(x) = 1$ or $f(x) = 4$

iii) $f(x) = 1$ 일 때 x 가 홀수이면 존재하지 않고

x 가 짝수이면 $x = 2$

iv) $f(x) = 4$ 일 때 x 가 홀수이면 $x = 3$

x 가 짝수이면 $x = 8$

$\therefore f(f(x)) = 2$ 를 만족하는 x 값은 $x = 2, 3, 8$

$\therefore 2 + 3 + 8 = 13$

19. 함수 $f(x) = \sqrt{x-2}$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. 점 P 는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프 위를 움직이고, 점 Q 는 $y = g(x)$ 의 그래프 위를 움직인다. 이 때, 두 점 P, Q 사이의 거리의 최솟값을 구하면?

- ① $\frac{5\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ③ $\frac{7\sqrt{2}}{4}$ ④ $\frac{9\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

해설

우선, $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 를 구하자.

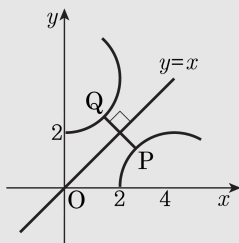
$$f(x) = \sqrt{x-2} \text{ 라 하면 } y^2 = x-2$$

$$\therefore x = y^2 + 2$$

위 식의 x 와 y 를 바꾸면 $y = x^2 + 2$

$$\therefore f^{-1}(x) = g(x) = x^2 + 2$$

한편, 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 는 역함수 관계이므로 직선 $y = x$ 에 대칭이다.



또, P, Q 사이의 거리가 최소가 되는 것은

선분 PQ 와 직선 $y = x$ 가 수직을 이룰 때이다.

동점 P, Q 사이의 거리의 최솟값은 점 Q 와 직선 $y = x$ 사이의 거리의 최솟값의 2 배이다. 동점 $Q(a, a^2 + 2)$ 라 놓고

직선 $y = x$ 와 점 Q 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|a - (a^2 + 2)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{\left| -\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{4} \right|}{\sqrt{2}} = \frac{\left| \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \right|}{\sqrt{2}}$$

거리 d 의 최솟값은 $a = \frac{1}{2}$ 일 때

$$\frac{\frac{7}{4}}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{8} \text{ 이므로}$$

두 점 P, Q 사이의 거리의 최소값은

$$\therefore \frac{7\sqrt{2}}{8} \times 2 = \frac{7\sqrt{2}}{4}$$