1. p : $x = 3$, q : $x^2 = 3x$ 에서 p 는 q 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답: ______ 조건

▷ 정답: 충분조건

해설

조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면 $P = \{3\}$, $Q = \{0, 3\}$ 이므로 $P \subset Q$, $Q \not\subset P$ $\therefore$ 충분조건

2. $a > 0,\ b > 0$ 일 때, $\sqrt{2(a+b)}$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 의 대소를 바르게 나타낸 것은?

① $\sqrt{2(a+b)} < \sqrt{a}+\sqrt{b}$　② $\sqrt{2(a+b)} \le \sqrt{a}+\sqrt{b}$

③ $\sqrt{2(a+b)} > \sqrt{a}+\sqrt{b}$　④ $\sqrt{2(a+b)} \ge \sqrt{a}+\sqrt{b}$

⑤ $\sqrt{2(a+b)} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$

해설

$(\sqrt{2(a+b)})^2 - (\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$
$= 2(a+b) - (a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b)$
$= a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b$
$= (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \ge 0$
(단, 등호는 $a = b$ 일때 성립)

따라서 $\sqrt{2(a+b)} \ge \sqrt{a}+\sqrt{b}$

3. $x>0,\ y>0$ 일 때, $(3x+4y)\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{y}\right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 27

해설

$x>0,\ y>0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$(3x+4y)\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{y}\right)$

$=3+\frac{4y}{x}+\frac{9x}{y}+12\geq 15+2\sqrt{\frac{4y}{x}\cdot\frac{9x}{y}}$

$=15+12$

(단, 등호는 $\frac{4y}{x}=\frac{9x}{y}$, 즉 $3x=2y$ 일 때 성립)

따라서 최솟값은 27 이다.

4. 두 양수 a, b에 대하여 $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)$의 최솟값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

a, b는 양수이므로

$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)=ab+4+1+\frac{4}{ab}$

$=5+ab+\frac{4}{ab}\geq 5+2\sqrt{ab\cdot\frac{4}{ab}}$

$=5+4=9$

$\therefore$ 최솟값은 9

5. 실수 x, y가 $x^2 + y^2 = 5$를 만족할 때, $x + 2y$의 최댓값 M, 최솟값 m의 합 $M + m$을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$(1^2 + 2^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 2y)^2$

$(x + 2y)^2 \leq 5 \cdot 5$

$\therefore -5 \leq x + 2y \leq 5$이므로

$x + 2y$의 최댓값 $M = 5$, 최솟값 $m = -5$

$\therefore\ M + n = 5 + (-5) = 0$

6. 명제 p, q, r 에 대하여 p 는 q이기 위한 필요조건, r 은 q이기 위한 충분조건일 때, p 는 r 이기 위한 무슨 조건인가?

① 필요
② 충분
③ 필요충분
④ 아무 조건도 아니다.
⑤ q 에 따라 다르다.

해설

p 는 q이기 위한 필요조건이므로 $p \Leftarrow q$,
즉 $q \Rightarrow p$ 가 성립하고 r 은 q이기 위한 충분조건,
즉 $r \Rightarrow q$ 가 성립하므로 $r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 이다.
그러나 $p \Rightarrow r$인지는 알 수 없다.
따라서 $r \Rightarrow p$ 이므로 p 는 r 이기 위한 필요조건이다.

7. 다음 두 식의 대소를 바르게 비교한 것은?

$$A = 3x^2 - xy + 2y^2$$
$$B = 2x^2 + 3xy - 3y^2$$

① $A < B$　② $A \leq B$　③ $A > B$
④ $A \geq B$　⑤ $A = B$

해설

$$\begin{aligned} A - B &= 3x^2 - xy + 2y^2 - (2x^2 + 3xy - 3y^2) \\ &= x^2 - 4xy + 5y^2 \\ &= x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 \\ &= (x - 2y)^2 + y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

따라서 $A - B \geq 0$이므로 $A \geq B$

8. 세 수 2^{60}, 3^{40}, 5^{30}의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $5^{30} < 3^{40} < 2^{60}$
② $3^{40} < 2^{60} < 5^{30}$
③ $3 < 5^{30} < 2^{60}$
④ $2^{60} < 5^{30} < 3^{40}$
⑤ $2^{60} < 3^{40} < 5^{30}$

해설

$\frac{2^{60}}{3^{40}} = \left(\frac{2^3}{3^2}\right)^{20} = \left(\frac{8}{9}\right)^{20} < 1$ 따라서 $2^{60} < 3^{40}$

$\frac{3^{40}}{5^{30}} = \left(\frac{3^4}{5^3}\right)^{10} = \left(\frac{81}{125}\right)^{10} < 1$ 따라서 $3^{40} < 5^{30}$

$\therefore 2^{60} < 3^{40} < 5^{30}$

9. a, b 가 실수일 때, 다음은 부등식$|a|+|b| \geq |a+b|$ 을 증명한 것이다. 증명과정에 쓰이지 <u>않은</u> 성질을 고르면?

증명

$(|a|+|b|)^2-(|a+b|)^2$
$=|a|^2+|b|^2+2|a||b|-(a+b)^2$
$=\ a^2+b^2+2|ab|-a^2-2ab-b^2$
$=\ 2(|ab|-ab)\ 0$
$\therefore (|a|+|b|)^2 \geq (|a+b|)^2$
$\therefore |a|+|b| \geq |a+b|$

① $|a| \geq a$

② $a \geq b$, $b \geq c$ 이면 $a \geq c$

③ $|a|^2=a^2$

④ $a-b \geq 0$ 이면 $a \geq b$

⑤ $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a^2 \geq b^2$ 이면 $a \geq b$

해설

$(|a|+|b|)^2-(|a+b|)^2$
$=|a|^2+|b|^2+2|a||b|-(a+b)^2$ (③이 쓰임)
$=a^2+b^2+2|ab|-a^2-2ab-b^2$
$=2(|ab|-ab) \geq 0$ (①이 쓰임)
$\therefore (|a|+|b|)^2 \geq (|a+b|)^2$ (④가 쓰임)
$\therefore |a|+|b| \geq |a+b|$ (⑤가 쓰임)
따라서, ②는 쓰이지 않았다.

10. 두 양수 a, b에 대하여 다음 설명 중 <u>틀린</u> 것은?

① a, b의 산술 평균은 $\frac{a+b}{2}$ 이다.

② $\sqrt{ab}$는 a, b의 기하평균이다.

③ $a+b \geq 2\sqrt{ab}$은 절대부등식이다.

④ $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$이면 반드시 $b = \frac{1}{a}$이다.

⑤ $a + \frac{1}{a} \geq 2$는 항상 성립한다.

해설

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \cdots$ 절대부등식

$\frac{a+b}{2}$: 산술평균, $\sqrt{ab}$: 기하평균

④: 절대부등식의 등호는 $a = b$일 때 성립한다.

11. x, y가 실수일 때, $|x| + |y| = |x + y|$가 되기 위한 필요충분조건을 구하면?

① $xy = 0$　② $xy > 0$　③ $xy \geq 0$
④ $xy < 0$　⑤ $xy \leq 0$

해설
양변을 제곱하면 $x^2 + y^2 + 2|xy| = x^2 + y^2 + 2xy$
$\therefore$ $|xy| = xy$ 가 성립하려면 $xy \geq 0$ 일 때이다.

12. $p : -1 \le x \le 1$ 또는 $x \ge 3$, $q : x \ge a$ 에 대하여 q 는 p 이기 위한 필요조건일 때, 정수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

두 조건 p, g 의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
q 는 p 이기 위한 필요조건이므로 $P \subset Q$ 이다.
$\therefore\ a \le -1$
따라서 a 의 최댓값은 -1 이다.

13. 두 집합 P, Q 는 각각 조건 p, q 를 만족하는 원소들의 집합이고, 두 집합 P, Q 에 대하여 $P-(P-Q)=P$ 가 성립할 때, 다음 중 옳은 것은?

① p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

② p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

③ p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.

④ p 는 q 이기 위한 충분조건 또는 필요조건이다.

⑤ p 는 q 이기 위한 아무조건도 아니다.

해설

$P-(P-Q)=P-(P\cap Q^c)=P\cap(P\cap Q^c)^c$
$=P\cap(P^c\cup Q)=(P\cap P^c)\cup(P\cap Q)=P\cap Q=P$ 이므로
$P\subset Q$ 이고 $p\Rightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

14. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 r 이기 위한 충분조건, q 는 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이 때, q는 p이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답: ______ 조건

▷ 정답: 필요조건

해설

$P \subset R \subset S \subset Q$ $\therefore$ $P \subset Q$이므로 $P \subset Q$

$\therefore$ q 는 p 이기 위한 필요조건

15. 네 조건 $p,\ q,\ r,\ s$ 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, r은 q 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 충분조건, q 는 s 이기 위한 충분조건일 때, 다음 중 옳지 않은 것은 ?

① r은 p이기 위한 충분조건

② s는 r이기 위한 필요충분조건

③ r은 q이기 위한 필요충분조건

④ s는 p 이기 위한 필요조건

⑤ s는 q이기 위한 필요충분조건

해설

① $r \rightarrow p$
② $s \leftrightarrow r,\ r \leftrightarrow s$
③ $r \leftrightarrow q,\ q \leftrightarrow r$
④ $s \rightarrow p$
⑤ $s \leftrightarrow q,\ q \leftrightarrow s$

16. 세 조건 p, q, r에 대하여 q는 p의 필요조건, q는 r의 충분조건이고 r는 p의 충분조건이다. 이 때, p는 r이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답: ______ 조건

▷ 정답: 필요충분조건

해설

q는 p의 필요조건이므로 $p \Rightarrow q$ …… ㉠
q는 r의 충분조건이므로 $q \Rightarrow r$ …… ㉡
r는 p의 충분조건이므로 $r \Rightarrow p$ …… ㉢
㉠, ㉡ 에서 $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$이므로
$p \Rightarrow r$ …… ㉣
㉢, ㉣에서 $r \Rightarrow p$, $p \Rightarrow r$이므로 $r \leftrightarrow p$이다.
$\therefore$ 필요충분조건

17. 세 수 $A=\sqrt{6}+\sqrt{7}, B=\sqrt{5}+2\sqrt{2}$, $C=\sqrt{3}+\sqrt{10}$의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A<B<C$ ② $A<C<B$ ③ $B<A<C$

④ $C<A<B$ ⑤ $C<B<A$

해설

$A>0,\ B>0,\ C>0$ 이므로

A^2, B^2, C^2 의 대소를 비교한 것과 같다.

$A^2=(\sqrt{6}+\sqrt{7})^2=13+2\sqrt{42}$

$B^2=(\sqrt{5}+2\sqrt{2})^2=13+2\sqrt{40}$

$C^2=(\sqrt{3}+\sqrt{10})^2=13+2\sqrt{30}$

이므로 $A^2>B^2>C^2$ 이다.

따라서 $A>B>C$

18. 다음 [보기] 중 절대부등식인 것의 개수는? (단, x, y, z 는 실수이다.)

보기

㉠ $x^2 - xy + y^2 \geq 0$

㉡ $x^2 + 4x \geq -4$

㉢ $|x| + |y| \geq |x - y|$

㉣ $x^2 \geq 0$

㉤ $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

㉠ $x^2 - xy + y^2 = x^2 - yx + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}y^2 + y^2$

$= \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0 \rightarrow$ 절대부등식

㉡ $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \geq 0 \rightarrow$ 절대부등식

㉢ $(|x| + |y|)^2 = x^2 + 2|x||y| + y^2$

$(|x - y|)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

㉣ $x^2 \geq 0 \rightarrow$ 절대부등식

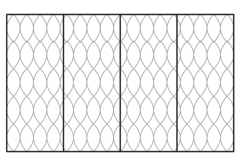
㉤ $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$

$= \frac{1}{2}\,(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\} \geq 0$

$\rightarrow$ 절대부등식

따라서 옳은 것은 모두 4 개이다.

19. 어떤 농부가 길이 $60\,\mathrm{m}$의 철망을 가지고 아래 그림과 같이 네 개의 작은 직사각형으로 이루어진 직사각형 모양의 우리를 만들려고 한다. 이 때, 전체 우리의 넓이의 최댓값은?



① $60\mathrm{m}^2$ ② $70\mathrm{m}^2$ ③ $80\mathrm{m}^2$ ④ $90\mathrm{m}^2$ ⑤ $100\mathrm{m}^2$

해설

전체 직사각형의 가로를 a, 세로를 b라 하면
$2a+5b=60$
$a,\ b$는 양수이므로
$60=2a+5b \geq 2\sqrt{2a\cdot 5b}$
양변을 제곱하면 $40ab \leq 60^2$
$\therefore\ ab \leq 90$
한편, 직사각형의 넓이는 $S=ab$이므로
$S=ab \leq 90$
따라서, 넓이의 최댓값은 $90(\mathrm{m}^2)$

20. 부등식 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \le 24$를 만족시키는 실수 x, y, z에 대하여 $x - 2y + 3z$의 최솟값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -12

해설

코시-슈바르츠 부등식을 이용하면

$(x - 2y + 3z)^2$

$= \left\{x + \sqrt{2}(-\sqrt{2}y) + \sqrt{3}(\sqrt{3}z)\right\}^2$

$\le \left\{1^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2\right\}$

$\left\{x^2 + (-\sqrt{2}y)^2 + (\sqrt{3}z)^2\right\}$

$= 6(x^2 + 2y^2 + 3z^2) \le 144$

$\therefore\ -12 \le x - 2y + 3z \le 12$

따라서, 구하는 최솟값은 -12이다.

(참고) 위의 부등식에서 $\frac{x}{1} = \frac{-\sqrt{2}y}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}z}{\sqrt{3}}$,

$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 24$

즉, $x = -y = \pm 2$일 때 등식이 성립한다.

21. 다음 중 p가 q이기 위한 필요충분조건인 것은?(a, x, y, z는 모두 실수)

① $p : a < b$, $q : |a| < |b|$

② $p : 2x + 3 = 5$, $q : x^2 - 2x + 1 = 0$

③ $p : a > 3$, $q : a^2 > 9$

④ $p : x > 0$ 이고 $y > 0$, $q : x + y > 0$

⑤ $p : xy = yz$, $q : x = z$

해설

주어진 명제도 참이고 역도 참인 것을 고른다.
① 주어진 명제, 역 모두 거짓이다.
② p, q를 만족하는 값이 모두 $x = 1$이므로 필요충분조건이다.
③, ④ 주어진 명제만 참이고 역은 성립하지 않는다. $\therefore$ p는 q이기 위한 충분조건이다.
⑤ 주어진 명제는 거짓이고 역은 참이다.
$\therefore$ p 는 q 이기 위한 필요조건이다.

22. 다음 중 조건 p가 조건 q이기 위한 필요충분조건인 것을 모두 고르면? (단, x, y는 실수)

ㄱ $p : x = 0$ 또는 $y = 0$, $q : xy = 0$

ㄴ $p : xy = 1$, $q : x = 1$ 이고 $y = 1$

ㄷ $p : x$, y는 모두 짝수, $q : x + y$는 짝수

① ㄱ　　② ㄴ　　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　　⑤ ㄴ, ㄷ

해설

ㄴ 필요조건
ㄷ 충분조건

23. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하자. p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닐 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

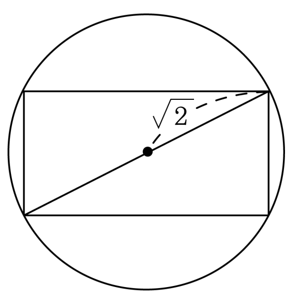
① $Q^c \cap P^c = Q^c$　　② $P - Q = \varnothing$　　③ $P \cup Q = Q$

④ $Q - P = \varnothing$　　⑤ $P \cap Q = P$

해설

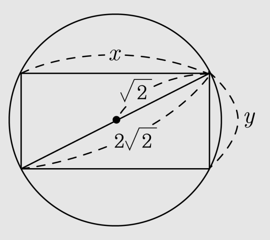
p 가 q 이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$
p 가 q 이기 위한 필요조건이 아니므로 $Q \not\subset P$
$\therefore Q - P \neq \varnothing$

24. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?



① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

해설



그림과 같이 직사각형의 가로의 길이와 세로의 길이를 각각 $x,\ y(x>0,\ y>0)$ 라고 하면
$x^2+y^2=(2\sqrt{2})^2=8$
직사각형의 둘레의 길이는 $2x+2y$ 이므로
코시-슈바르츠의 부등식에 의하여
$(2x+2y)^2 \le (2^2+2^2)(x^2+y^2)=8\times 8=64$ (단, 등호는 $x=y$ 일 때 성립)
$\therefore -8 \le 2x+2y \le 8$
따라서 구하는 최댓값은 8이다.