

1. $p : x = 3$, $q : x^2 = 3x$ 에서 p 는 q 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 충분조건

해설

조건 p , q 의 진리집합을 각각 P , Q 라 하면 $P = \{3\}$, $Q = \{0, 3\}$
이므로 $P \subset Q$, $Q \not\subset P \therefore$ 충분조건

2. $a > 0, b > 0$ 일 때, $\sqrt{2(a+b)}, \sqrt{a} + \sqrt{b}$ 의 대소를 바르게 나타낸 것은?

① $\sqrt{2(a+b)} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

② $\sqrt{2(a+b)} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

③ $\sqrt{2(a+b)} > \sqrt{a} + \sqrt{b}$

④ $\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

⑤ $\sqrt{2(a+b)} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

해설

$$\begin{aligned} & (\sqrt{2(a+b)})^2 - (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \\ &= 2(a+b) - (a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b) \\ &= a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \\ &= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \\ & \text{(단, 등호는 } a=b \text{ 일 때 성립)} \end{aligned}$$

따라서 $\sqrt{2(a+b)} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}$

3. $x > 0$, $y > 0$ 일 때, $(3x + 4y) \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{y} \right)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 27

해설

$x > 0$, $y > 0$ 이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$(3x + 4y) \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{y} \right)$$

$$= 3 + \frac{4y}{x} + \frac{9x}{y} + 12 \geq 15 + 2\sqrt{\frac{4y}{x} + \frac{9x}{y}}$$

$$= 15 + 12$$

(단, 등호는 $\frac{4y}{x} = \frac{9x}{y}$, 즉 $3x = 2y$ 일 때 성립)

따라서 최솟값은 27이다.

4. 두 양수 a, b 에 대하여 $\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{4}{a}\right)$ 의 최솟값은?

① 7

② 8

③ 9

④ 10

⑤ 11

해설

a, b 는 양수이므로

$$\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{4}{a}\right) = ab + 4 + 1 + \frac{4}{ab}$$

$$= 5 + ab + \frac{4}{ab} \geq 5 + 2\sqrt{ab \cdot \frac{4}{ab}}$$

$$= 5 + 4 = 9$$

$\therefore$ 최솟값은 9

5. 실수 x, y 가 $x^2 + y^2 = 5$ 를 만족할 때, $x + 2y$ 의 최댓값 M , 최솟값 m 의 합 $M + m$ 을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

코시-슈바르츠의 부등식에 의해

$$(1^2 + 2^2)(x^2 + y^2) \geq (x + 2y)^2$$

$$(x + 2y)^2 \leq 5 \cdot 5$$

$$\therefore -5 \leq x + 2y \leq 5 \text{ 이므로}$$

$$x + 2y \text{의 최댓값 } M = 5, \text{ 최솟값 } m = -5$$

$$\therefore M + n = 5 + (-5) = 0$$

6. 명제 p, q, r 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, r 은 q 이기 위한 충분조건일 때, p 는 r 이기 위한 무슨 조건인가?

① 필요

② 충분

③ 필요충분

④ 아무 조건도 아니다.

⑤ q 에 따라 다르다.

해설

p 는 q 이기 위한 필요조건이므로 $p \Leftarrow q$,
즉 $q \Rightarrow p$ 가 성립하고 r 은 q 이기 위한 충분조건,
즉 $r \Rightarrow q$ 가 성립하므로 $r \Rightarrow q \Rightarrow p$ 이다.
그러나 $p \Rightarrow r$ 인지는 알 수 없다.
따라서 $r \Rightarrow p$ 이므로 p 는 r 이기 위한 필요조건이다.

7. 다음 두 식의 대소를 바르게 비교한 것은?

$$A = 3x^2 - xy + 2y^2$$

$$B = 2x^2 + 3xy - 3y^2$$

① $A < B$

② $A \leq B$

③ $A > B$

④ $A \geq B$

⑤ $A = B$

해설

$$\begin{aligned} A - B &= 3x^2 - xy + 2y^2 - (2x^2 + 3xy - 3y^2) \\ &= x^2 - 4xy + 5y^2 \\ &= x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 \\ &= (x - 2y)^2 + y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

따라서 $A - B \geq 0$ 이므로 $A \geq B$

8. 세 수 2^{60} , 3^{40} , 5^{30} 의 대소를 바르게 비교한 것은?

① $5^{30} < 3^{40} < 2^{60}$

② $3^{40} < 2^{60} < 5^{30}$

③ $3 < 5^{30} < 2^{60}$

④ $2^{60} < 5^{30} < 3^{40}$

⑤ $2^{60} < 3^{40} < 5^{30}$

해설

$$\frac{2^{60}}{3^{40}} = \left(\frac{2^3}{3^2}\right)^{20} = \left(\frac{8}{9}\right)^{20} < 1 \text{ 따라서 } 2^{60} < 3^{40}$$

$$\frac{3^{40}}{5^{30}} = \left(\frac{3^4}{5^3}\right)^{10} = \left(\frac{81}{125}\right)^{10} < 1 \text{ 따라서 } 3^{40} < 5^{30}$$

$$\therefore 2^{60} < 3^{40} < 5^{30}$$

9. a, b 가 실수일 때, 다음은 부등식 $|a| + |b| \geq |a + b|$ 을 증명한 것이다. 증명과정에 쓰이지 않은 성질을 고르면?

증명

$$\begin{aligned}
 & (|a| + |b|)^2 - (a + b)^2 \\
 &= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2 \\
 &= a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2 \\
 &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \\
 &\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (a + b)^2 \\
 &\therefore |a| + |b| \geq |a + b|
 \end{aligned}$$

- ① $|a| \geq a$
 ② $a \geq b, b \geq c$ 이면 $a \geq c$
 ③ $|a|^2 = a^2$
 ④ $a - b \geq 0$ 이면 $a \geq b$
 ⑤ $a \geq 0, b \geq 0, a^2 \geq b^2$ 이면 $a \geq b$

해설

$$\begin{aligned}
 & (|a| + |b|)^2 - (a + b)^2 \\
 &= |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| - (a + b)^2 \text{ (③이 쓰임)} \\
 &= a^2 + b^2 + 2|ab| - a^2 - 2ab - b^2 \\
 &= 2(|ab| - ab) \geq 0 \text{ (①이 쓰임)} \\
 &\therefore (|a| + |b|)^2 \geq (a + b)^2 \text{ (④가 쓰임)} \\
 &\therefore |a| + |b| \geq |a + b| \text{ (⑤가 쓰임)} \\
 &\text{따라서, ②는 쓰이지 않았다.}
 \end{aligned}$$

10. 두 양수 a, b 에 대하여 다음 설명 중 틀린 것은?

① a, b 의 산술 평균은 $\frac{a+b}{2}$ 이다.

② $\sqrt{ab}$ 는 a, b 의 기하평균이다.

③ $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ 은 절대부등식이다.

④ $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$ 이면 반드시 $b = \frac{1}{a}$ 이다.

⑤ $a + \frac{1}{a} \geq 2$ 는 항상 성립한다.

해설

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \dots \text{절대부등식}$$

$$\frac{a+b}{2}: \text{산술평균}, \sqrt{ab}: \text{기하평균}$$

④: 절대부등식의 등호는 $a = b$ 일 때 성립한다.

11. x, y 가 실수일 때. $|x| + |y| = |x + y|$ 가 되기 위한 필요충분조건을 구하면?

① $xy = 0$

② $xy > 0$

③ $xy \geq 0$

④ $xy < 0$

⑤ $xy \leq 0$

해설

양변을 제곱하면 $x^2 + y^2 + 2|xy| = x^2 + y^2 + 2xy$

$\therefore |xy| = xy$ 가 성립하려면 $xy \geq 0$ 일 때이다.

12. $p : -1 \leq x \leq 1$ 또는 $x \geq 3$, $q : x \geq a$ 에 대하여 q 는 p 이기 위한 필요조건일 때, 정수 a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

두 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 하면
 q 는 p 이기 위한 필요조건이므로 $P \subset Q$ 이다.

$$\therefore a \leq -1$$

따라서 a 의 최댓값은 -1 이다.

13. 두 집합 P, Q 는 각각 조건 p, q 를 만족하는 원소들의 집합이고, 두 집합 P, Q 에 대하여 $P - (P - Q) = P$ 가 성립할 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① p 는 q 이기 위한 충분조건이다.
- ② p 는 q 이기 위한 필요조건이다.
- ③ p 는 q 이기 위한 필요충분조건이다.
- ④ p 는 q 이기 위한 충분조건 또는 필요조건이다.
- ⑤ p 는 q 이기 위한 아무조건도 아니다.

해설

$$\begin{aligned} P - (P - Q) &= P - (P \cap Q^c) = P \cap (P \cap Q^c)^c \\ &= P \cap (P^c \cup Q) = (P \cap P^c) \cup (P \cap Q) = P \cap Q = P \text{ 이므로} \\ P &\subset Q \text{ 이고 } p \Rightarrow q \text{ 이므로 } p \text{ 는 } q \text{ 이기 위한 충분조건이다.} \end{aligned}$$

14. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 r 이기 위한 충분조건, q 는 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건이다. 이 때, q 는 p 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

$P \subset R \subset S \subset Q \therefore P \subset Q$ 이므로 $P \subset Q$

$\therefore q$ 는 p 이기 위한 필요조건

15. 네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 q 이기 위한 필요조건, r 은 q 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 충분조건, q 는 s 이기 위한 충분조건일 때, 다음 중 옳지 않은 것은 ?

- ① r 은 p 이기 위한 충분조건
- ② s 는 r 이기 위한 필요충분조건
- ③ r 은 q 이기 위한 필요충분조건
- ④ s 는 p 이기 위한 필요조건
- ⑤ s 는 q 이기 위한 필요충분조건

해설

- ① $r \rightarrow p$
- ② $s \leftrightarrow r, r \leftrightarrow s$
- ③ $r \leftrightarrow q, q \leftrightarrow r$
- ④ $s \rightarrow p$
- ⑤ $s \leftrightarrow q, q \leftrightarrow s$

16. 세 조건 p, q, r 에 대하여 q 는 p 의 필요조건, q 는 r 의 충분조건이고 r 는 p 의 충분조건이다. 이 때, p 는 r 이기 위한 무슨 조건인지 구하여라.



답:

조건



정답: 필요충분조건

해설

q 는 p 의 필요조건이므로 $p \Rightarrow q \dots\dots \textcircled{㉠}$

q 는 r 의 충분조건이므로 $q \Rightarrow r \dots\dots \textcircled{㉡}$

r 는 p 의 충분조건이므로 $r \Rightarrow p \dots\dots \textcircled{㉢}$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에서 $p \Rightarrow q, q \Rightarrow r$ 이므로

$p \Rightarrow r \dots\dots \textcircled{㉤}$

$\textcircled{㉢}, \textcircled{㉤}$ 에서 $r \Rightarrow p, p \Rightarrow r$ 이므로 $r \leftrightarrow p$ 이다.

$\therefore$ 필요충분조건

17. 세 수 $A = \sqrt{6} + \sqrt{7}$, $B = \sqrt{5} + 2\sqrt{2}$, $C = \sqrt{3} + \sqrt{10}$ 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $A < B < C$

② $A < C < B$

③ $B < A < C$

④ $C < A < B$

⑤ $C < B < A$

해설

$A > 0$, $B > 0$, $C > 0$ 이므로

A^2, B^2, C^2 의 대소를 비교한 것과 같다.

$$A^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{7})^2 = 13 + 2\sqrt{42}$$

$$B^2 = (\sqrt{5} + 2\sqrt{2})^2 = 13 + 2\sqrt{40}$$

$$C^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{10})^2 = 13 + 2\sqrt{30}$$

이므로 $A^2 > B^2 > C^2$ 이다.

따라서 $A > B > C$

18. 다음 [보기] 중 절대부등식인 것의 개수는? (단, x, y, z 는 실수이다.)

보기

㉠ $x^2 - xy + y^2 \geq 0$

㉡ $x^2 + 4x \geq -4$

㉢ $|x| + |y| \geq |x - y|$

㉤ $x^2 \geq 0$

㉥ $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$

① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

㉠ $x^2 - xy + y^2 = x^2 - yx + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{4}y^2 + y^2$

$= \left(x - \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0 \rightarrow \text{절대부등식}$

㉡ $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 \geq 0 \rightarrow \text{절대부등식}$

㉢ $(|x| + |y|)^2 = x^2 + 2|x||y| + y^2$

$(|x - y|)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

㉤ $x^2 \geq 0 \rightarrow \text{절대부등식}$

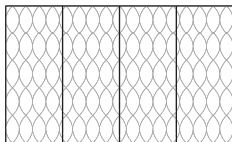
㉥ $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx$

$= \frac{1}{2} \{ (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \} \geq 0$

$\rightarrow \text{절대부등식}$

따라서 옳은 것은 모두 4 개이다.

19. 어떤 농부가 길이 60m의 철망을 가지고 아래 그림과 같이 네 개의 작은 직사각형으로 이루어진 직사각형 모양의 우리를 만들려고 한다. 이 때, 전체 우리의 넓이의 최댓값은?



① 60m^2

② 70m^2

③ 80m^2

④ 90m^2

⑤ 100m^2

해설

전체 직사각형의 가로를 a , 세로를 b 라 하면

$$2a + 5b = 60$$

a, b 는 양수이므로

$$60 = 2a + 5b \geq 2\sqrt{2a \cdot 5b}$$

양변을 제곱하면 $40ab \leq 60^2$

$$\therefore ab \leq 90$$

한편, 직사각형의 넓이는 $S = ab$ 이므로

$$S = ab \leq 90$$

따라서, 넓이의 최댓값은 $90(\text{m}^2)$

20. 부등식 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 24$ 를 만족시키는 실수 x, y, z 에 대하여 $x - 2y + 3z$ 의 최솟값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -12

해설

코시-슈바르츠 부등식을 이용하면

$$\begin{aligned} & (x - 2y + 3z)^2 \\ &= \{x + \sqrt{2}(-\sqrt{2}y) + \sqrt{3}(\sqrt{3}z)\}^2 \\ &\leq \{1^2 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2\} \\ &\quad \{x^2 + (-\sqrt{2}y)^2 + (\sqrt{3}z)^2\} \\ &= 6(x^2 + 2y^2 + 3z^2) \leq 144 \\ &\therefore -12 \leq x - 2y + 3z \leq 12 \end{aligned}$$

따라서, 구하는 최솟값은 -12이다.

(참고) 위의 부등식에서 $\frac{x}{1} = \frac{-\sqrt{2}y}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}z}{\sqrt{3}},$

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 24$$

즉, $x = -y = \pm 2$ 일 때 등식이 성립한다.

21. 다음 중 p 가 q 이기 위한 필요충분조건인 것은? (a, x, y, z 는 모두 실수)

① $p : a < b, \quad q : |a| < |b|$

② $p : 2x + 3 = 5, \quad q : x^2 - 2x + 1 = 0$

③ $p : a > 3, \quad q : a^2 > 9$

④ $p : x > 0$ 이고 $y > 0, \quad q : x + y > 0$

⑤ $p : xy = yz, \quad q : x = z$

해설

주어진 명제도 참이고 역도 참인 것을 고른다.

① 주어진 명제, 역 모두 거짓이다.

② p, q 를 만족하는 값이 모두 $x = 1$ 이므로 필요충분조건이다.

③, ④ 주어진 명제만 참이고 역은 성립하지 않는다. $\therefore p$ 는 q 이기 위한 충분조건이다.

⑤ 주어진 명제는 거짓이고 역은 참이다.

$\therefore p$ 는 q 이기 위한 필요조건이다.

22. 다음 중 조건 p 가 조건 q 이기 위한 필요충분조건인 것을 모두 고르면?
(단, x, y 는 실수)

㉠ $p : x = 0$ 또는 $y = 0, q : xy = 0$

㉡ $p : xy = 1, q : x = 1$ 이고 $y = 1$

㉢ $p : x, y$ 는 모두 짝수, $q : x + y$ 는 짝수

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉡

⑤ ㉡, ㉢

해설

㉡ 필요조건

㉢ 충분조건

23. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 하자. p 가 q 이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아닐 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $Q^c \cap P^c = Q^c$

② $P - Q = \emptyset$

③ $P \cup Q = Q$

④ $Q - P = \emptyset$

⑤ $P \cap Q = P$

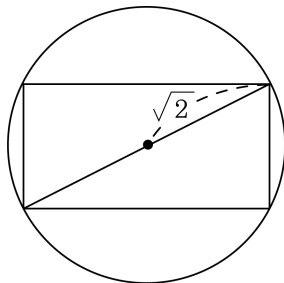
해설

p 가 q 이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$

p 가 q 이기 위한 필요조건이 아니므로 $Q \not\subset P$

$\therefore Q - P \neq \emptyset$

24. 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 원에 내접하는 직사각형의 둘레의 길이의 최댓값은?



① 6

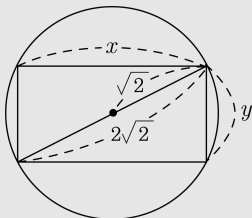
② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설



그림과 같이 직사각형의 가로 길이를 x , 세로 길이를 y ($x > 0, y > 0$) 라고 하면

$$x^2 + y^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$$

직사각형의 둘레의 길이는 $2x + 2y$ 이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$(2x + 2y)^2 \leq (2^2 + 2^2)(x^2 + y^2) = 8 \times 8 = 64 \quad (\text{단, 등호는 } x = y \text{ 일 때 성립})$$

$$\therefore -8 \leq 2x + 2y \leq 8$$

따라서 구하는 최댓값은 8이다.