1. $\log_x 2\sqrt{2} = \dfrac{3}{8}$ 을 만족하는 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$\log_x 2\sqrt{2} = \dfrac{3}{8}$ 에서

$x^{\frac{3}{8}} = 2\sqrt{2}$

$x = (2\sqrt{2})^{\frac{8}{3}} = (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{8}{3}} = 2^4 = 16$

2. $\log_{x-3}(-x^2+6x-8)$이 정의되기 위한 실수 x의 값의 범위를 구하면?

① $3 < x < 4$ ② $5 < x < 7$ ③ $-1 < x < 3$

④ $x > 0$ ⑤ $2 < x < 5$

해설

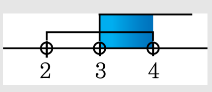
$x-3 \neq 1,\ x-3 > 0,$

$-x^2+6x-8 > 0$이므로

$x \neq 4,\ x > 3$

$x^2-6x+8 < 0$

$2 < x < 4$



$\therefore 3 < x < 4$

3. $\log(x-1)(x-2) = \log(x-1) + \log(x-2)$일 때, $|x-1| + |x-2|$를 간단히 하면?

① 3　② $2x$
③ $2-3x$ 또는 $3x-2$　④ $3-2x$
⑤ $2x-3$

해설

$x-1>0,\ x-2>0$이므로
$|x-1|+|x-2| = x-1+x-2 = 2x-3$

4. $x = \dfrac{\log_a(\log_a b)}{\log_a b}$ 일 때, 다음 중 b^x 과 같은 것은?

① a　② b　③ a^b　④ b^2　⑤ $\log_a b$

해설

주어진 식을 밑 변환의 공식에 의해 변형하면

$$x = \frac{\dfrac{\log_b(\log_a b)}{\log_b a}}{\dfrac{\log_b b}{\log_b a}} = \log_b(\log_a b)$$

로그의 정의에 의해 $b^x = \log_a b$

5. $3^{\log_3 \frac{4}{7}+\log_3 7}$ 의 값을 구하면?

① 1　② 2　③ 4　④ 5　⑤ 7

해설

$3^{\log_3 \frac{4}{7}+\log_3 7} = 3^{\log_3 4} = 4$

6. 1보다 큰 정수 a, b, c에 대하여 $p = a^{12} = b^4 = (abc)^2$일 때, $\log_c p$의 값을 구하면?

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 3 ④ 6 ⑤ 9

해설

주어진 식에서 $\log_p a = \frac{1}{12}$, $\log_p b = \frac{1}{4}$, $\log_p abc = \frac{1}{2}$

$\log_c p = x$라 하면 $\log_p c = \frac{1}{x}$이고,

$\log_p abc = \log_p a + \log_p b + \log_p c$이므로

$\frac{1}{2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$

$\therefore\ x = 6$

$\therefore\ \log_c p = 6$

7. 이차방정식 $2x^2-8x+1=0$의 두 근이 $\log_2\alpha, \log_2\beta$일 때, $\log_\alpha 2+\log_\beta 2+\log_{\alpha\beta}2$의 값은?

① $\frac{19}{4}$ ② $\frac{23}{4}$ ③ $\frac{27}{4}$ ④ $\frac{33}{4}$ ⑤ $\frac{35}{4}$

해설

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\log_2\alpha+\log_2\beta=4,\ \log_2\alpha\cdot\log_2\beta=\frac{1}{2}$이므로

$$\begin{aligned}\log_\alpha 2+\log_\beta 2&=\frac{1}{\log_2\alpha}+\frac{1}{\log_2\beta}\\&=\frac{\log_2\alpha+\log_2\beta}{\log_2\alpha\cdot\log_2\beta}\\&=\frac{4}{\frac{1}{2}}=8\end{aligned}$$

$\log_2\alpha\beta=4$이므로 $\alpha\beta=2^4$

$\therefore \log_{\alpha\beta}2=\log_{2^4}2=\frac{1}{4}$

$\therefore \log_\alpha 2+\log_\beta 2+\log_{\alpha\beta}2=8+\frac{1}{4}=\frac{33}{4}$

8. $\log_2 6$의 정수 부분을 x, 소수 부분을 y라고 할 때, $\dfrac{2^{x+y}-2^{x-y}}{2^x+2^y}$의 값은?

① $\dfrac{4}{39}$ ② $\dfrac{9}{43}$ ③ $\dfrac{19}{69}$ ④ $\dfrac{23}{73}$ ⑤ $\dfrac{20}{33}$

해설

$\log_2 4 < \log_2 6 < \log_2 8$이므로 $2 < \log_2 6 < 3$

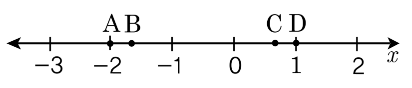
따라서 $x = 2,\ y = \log_2 6 - 2 = \log_2 \dfrac{6}{4} = \log_2 \dfrac{3}{2}$

$2^x = 2^2 = 4,\ 2^y = 2^{\log_2 \frac{3}{2}} = \dfrac{3}{2},\ 2^{-y} = \dfrac{2}{3}$

$$\frac{2^{x+y}-2^{x-y}}{2^x+2^y} = \frac{2^x \cdot 2^y - 2^x \cdot 2^{-y}}{2^x+2^y}$$

$$= \frac{4 \cdot \frac{3}{2} - 4 \cdot \frac{2}{3}}{4 + \frac{3}{2}} = \frac{20}{33}$$

9. 다음 그림과 같이 수직선 위에 네 점 $A(-2)$, $B(\log a)$, $C(\log b)$, $D(1)$이 있다.



$-2 < \log a < -1$, $0 < \log b < 1$, $\overline{AB} = \overline{CD}$일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $a + b = 1$　② $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{10}$　③ $\dfrac{b}{a} = 10$

④ $ab = \dfrac{1}{10}$　⑤ $ab = 10$

해설

$\overline{AB} = \overline{CD}$이므로 $\log a + 2 = 1 - \log b$

$\log a + \log b = \log ab = -1$

$ab = \dfrac{1}{10}$

10. $ab > 0$, $a^2 + 2ab - 15b^2 = 0$일 때, $\log_5(a^2 + 4ab - 17b^2) - \log_5(2a^2 - 3ab + 11b^2)$의 값은?

① 1　　② $\frac{1}{2}$　　③ $\frac{1}{5}$　　④ -1　　⑤ -2

해설

$a^2 + 2ab - 15b^2 = 0$에서 $(a - 3b)(a + 5b) = 0$

$\therefore\ a = 3b$ 또는 $a = -5b$

그런데 $ab > 0$이므로 $a = 3b$이다.

$a = 3b$를 주어진 식에 대입하면

$\log_5(a^2 + 4ab - 17b^2) - \log_5(2a^2 - 3ab + 11b^2)$

$= \log_5(9b^2 + 12b^2 - 17b^2) - \log_5(18b^2 - 9b^2 + 11b^2)$

$= \log_5 4b^2 - \log_5 20b^2 = \log_5 \frac{4b^2}{20b^2}$

$= \log_5 \frac{1}{5} = \log_5 5^{-1} = -1$

11. 1보다 큰 양수 a, b, c에 대하여 $a^x = b^{2y} = c^{3z} = 64$, $\log_2 abc = 12$가 성립할 때, $\frac{6}{x} + \frac{3}{y} + \frac{2}{z}$의 값은?

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

해설

a^{64}에서 $x = \log_a 64$

$\frac{1}{x} = \log_{64} a = \log_{2^6} a = \frac{1}{6}\log_2 a$

$b^{2y} = 64$에서 $2y = \log_b 64$

$\frac{1}{2y} = \log_{64} b = \log_{2^6} b = \frac{1}{6}\log_2 b$

$\frac{1}{y} = \frac{1}{3}\log_2 b$

$c^{3z} = 64$에서 $3z = \log_c 64$

$\frac{1}{3z} = \log_{64} c = \log_{2^6} c = \frac{1}{6}\log_2 c$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{2}\log_2 c$

$\therefore\ \frac{6}{x} + \frac{3}{y} + \frac{2}{z} = 6 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot \frac{1}{y} + 2 \cdot \frac{1}{z}$

$= 6 \cdot \frac{1}{6}\log_2 a + 3 \cdot \frac{1}{3}\log_2 b + 2 \cdot \frac{1}{2}\log_2 c$

$= \log_2 a + \log_2 b + \log_2 c = \log_2 abc = 12$

12. 세 자연수 $x,\ y,\ z$가 $x\log_{200}5+y\log_{200}2=z$를 만족할 때, $x,\ y,\ z$의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $x<y<z$ ② $x<z<y$ ③ $y<x<z$
④ $z<x<y$ ⑤ $z<y<x$

해설

$x\log_{200}5+y\log_{200}2=z$에서
$\log_{200}5^x+\log_{200}2^y=z$
$\log_{200}5^x\cdot 2^y=z$
$5^x\cdot 2^y=200^z=(2^3\cdot 5^2)^z=2^{3z}\cdot 5^{2z}$
따라서 $x=2z, y=3z$이므로
$x:y:z=2z:3z:z=2:3:1$
$\therefore z<x<y$