

1. 두 집합 $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 5\}$ 에 대하여 다음 중 옳은 것은?

① $B \subset A$

② $n(A) = 3$

③ $n(B) = \{1, 2, 3, 5\}$

④ $n\{B\} + n\{A\} = 6$

⑤ $A \not\subset B$

해설

① $B \not\subset A$

② $n(A) = 2$

③ $n(B) = 4$

⑤ $A \subset B$

2. 다음 두 집합 A, B 에 대하여 $A = B$ 인 것은?

① $A = \{2, 4, 6, 8, \dots\}, B = \{x \mid x \text{는 } 8 \text{ 이하의 짝수}\}$

② $A = \emptyset, B = \{0\}$

③ $A = \{a, b, c\}, B = \{b, c, d\}$

④ $A = \{0, 1\}, B = \{0, 1, 2\}$

⑤ $A = \{5, 10, 15, 20, \dots\}, B = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{의 배수}\}$

해설

① $A = \{2, 4, 6, 8, \dots\}, B = \{2, 4, 6, 8\}$ 이므로 $B \subset A, A \not\subset B$

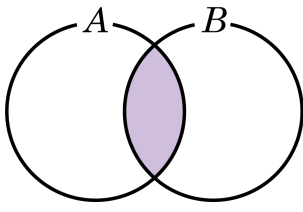
② $A = \emptyset, B = \{0\}$ 이므로 $A \subset B, B \not\subset A$

③ $A = \{a, b, c\}, B = \{b, c, d\}$ 이므로 포함 관계 없음.

④ $A = \{0, 1\}, B = \{0, 1, 2\}$ 이므로 $A \subset B, B \not\subset A$

⑤ $A = \{5, 10, 15, 20, \dots\},$
 $B = \{5, 10, 15, 20, \dots\}$ 이므로 $A = B$

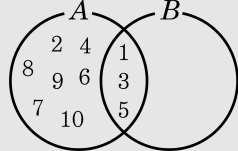
3. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ 일 때, 다음과 같은 벤 다이어그램에서 색칠한 부분을 나타내는 집합은?



- ① $\{1, 3\}$ ② $\{1, 5\}$ ③ $\{3, 5\}$
④ $\{1, 3, 5\}$ ⑤ $\{1, 3, 5, 10\}$

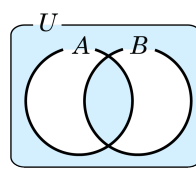
해설

벤 다이어그램을 그려보면 다음과 같다.



공통 부분의 원소는 $\{1, 3, 5\}$ 이다.

4. 다음 벤다이어그램에서 색칠한 부분을 나타내는 집합은?



- ① $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$ ② $(A \cup B) \cup (A \cap B)$
 ③ $(A \cap B) \cup (A^c - B^c)$ ④ $(A \cup B) \cap (A^c \cap B^c)$
 ⑤ $(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$

해설

벤다이어그램은 $(A \cap B) \cup (A \cup B)^c$ 을 나타낸다. $(A \cap B) \cup (A \cup B)^c = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$

5. $n(A) = 26$, $n(B) = 17$ 이고, $n(A \cap B) = 8$ 일 때, $n(A - B)$ 의 값은?

① 9

② 11

③ 18

④ 25

⑤ 26

해설

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

$$n(A - B) = 26 - 8 = 18$$

6. 실수 x 에 대하여 $x+1=0$ 이 $x^2+2x+a=0$ 이 되기 위한 충분조건일 때, 상수 a 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x+1=0$ 이 $x^2+2x+a=0$ 이 되기 위한 충분조건이므로 명제 ‘ $x+1=0$ 이면 $x^2+2x+a=0$ 이다.’가 참이다.
 $x+1=0$ 에서 $x=-1$ 을 $x^2+2x+a=0$ 에 대입하면
 $(-1)^2+2\cdot(-1)+a=1-2+a=0$
 $\therefore a=1$

7. 세 수 $-7 + 2x$, $5 + x$, $5 - 4x$ 가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x 의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 1

해설

$-7 + 2x$, $5 + x$, $5 - 4x$ 가 등차수열을 이루면 $5 + x$ 가 등차중항
이므로

$$2(5 + x) = -7 + 2x + 5 - 4x$$

$$4x = -12$$

$$\therefore x = -3$$

8. 첫째항이 3, 공차가 4, 항의 수가 10인 등차수열의 합 S_{10} 을 구하면?

① 150

② 170

③ 190

④ 210

⑤ 230

해설

$a = 3, d = 4, n = 10$ 이므로

$S_n = \frac{n\{2a + (n-1)d\}}{2}$ 에 대입하면

$$S_{10} = \frac{10\{2 \cdot 3 + (10-1) \cdot 4\}}{2} = 210$$

9. $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 으로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_5 의 값은?

① 4

② 8

③ 16

④ 32

⑤ 48

해설

수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 3, 공비가 2인 등비수열이므로 $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$
 $\therefore a_5 = 3 \cdot 2^4 = 48$

10. 전체집합 U 의 부분집합을 A, B 라고 할 때, 다음 중 옳은 것은 몇 개인가?

- $\supsetneq U - A^c = B$

$\supsetneq U \subset (A \cup B)$

$\supsetneq (A^c)^c = A$

$\supsetneq A \cap A^c = \emptyset$

$\supsetneq A \subset B$ 이면 $B^c \subset A^c$ 이다.

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$\supsetneq U - A^c = A$

$\supsetneq (A \cup B) \subset U$

따라서 ③, ④, ⑤이 옳다.

11. 학생 수가 50 명인 학급의 학생들이 보충수업 과목으로 국어, 수학을 선택해야 한다. 국어를 선택한 학생이 25 명이고 국어와 수학을 모두 선택한 학생이 7명일 때, 수학을 선택한 학생 수의 최댓값과 최솟값을 순서대로 나열한 것은?

- ① 25, 7 ② 32, 7 ③ 32, 18
④ 50, 18 ⑤ 50, 25

해설

학생 전체의 집합을 U , 국어, 수학을 선택한 학생의 집합을 각각 A, B 라 하면

$$n(U) = 50, n(A) = 25, n(A \cap B) = 7$$

$25 \leq n(A \cup B) \leq 50$ 에서

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \text{ 이므로}$$

$$25 \leq 25 + n(B) - 7 \leq 50$$

$$\therefore 7 \leq n(B) \leq 32$$

따라서 수학을 선택한 학생 수의 최댓값은 32, 최솟값은 7

12. 실수 전체집합에 대하여 세 조건 p, q, r 이 아래와 같을 때 다음 중 참인 명제는?

$p : x > 1, \quad q : 1 < x < 2, \quad r : x < 2$

- ① $p \rightarrow q$

② $p \rightarrow r$

③ $q \rightarrow r$

④ $r \rightarrow p$

⑤ $\sim r \rightarrow \sim p$

해설

$p : x > 1, \quad q : 1 < x < 2, \quad r : x < 2$

$\therefore Q \subset P, Q \subset R$ 이므로 $q \rightarrow p, q \rightarrow r$ (참)

13. 전체집합을 $U = \{-1, 0, 1\}$ 이라 할 때, 전체집합 U 에 대하여 다음 중 참인 명제는?

- ① 모든 x 에 대하여 $x^2 > 1$ 이다.
- ② 임의의 x, y 에 대하여 $x + y \leq 1$ 이다.
- ③ 어떠한 x 에 대하여도 $x^2 + 2x \geq -1$ 이다.
- ④ 적당한 x, y 에 대하여 $x^2 - y^2 > 1$ 이다.
- ⑤ $x^2 + x < x^3$ 인 x 가 존재한다.

해설

- ① 반례 : $x = 0$ 일 때 $x^2 = 0$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.
- ② 반례 : $x = y = 1$ 일 때 $x + y = 2 \geq 1$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.
- ③ 모든 x 에 대하여 $x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \geq 0$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
- ④ 모든 x, y 에 대하여 $x^2 - y^2 \leq 1$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.
- ⑤ 모든 x 에 대하여 $x^2 + x \geq x^3$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.

14. 명제 ‘ $|x-3| < a$ 이면 $1 < x < 7$ 이다.’ 가 참이 되기 위한 양수 a 의 최댓값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$-a < x-3 < a \Rightarrow 3-a < x < 3+a$$

$$\{x|3-a < x < 3+a\} \subset \{x|1 < x < 7\}$$

$\therefore 1 \leq 3-a$ 과 $3+a \leq 7$ 을 동시에 만족해야 한다.

$$\therefore a \leq 2$$

15. 다음 ㉞, ㉟에 알맞은 것끼리 짝지어진 것은?

네 조건 p, q, r, s 에 대하여 p 는 r 이기 위한 충분조건, q 는 r 이기 위한 충분조건, s 는 r 이기 위한 필요조건, q 는 s 이기 위한 필요조건일 때, s 는 p 이기 위한 (㉞) 조건이며 p 는 q 이기 위한 (㉟) 조건이다.

- ① 필요, 필요

② 필요, 충분

③ 충분, 필요

④ 충분, 충분

⑤ 필요충분, 충분

해설

네 조건 p, q, r, s 를 만족하는 집합은 각각 P, Q, R, S 라고 하면 $p \subset R, Q \subset R, S \supset R, Q \supset S, P \subset R, R \subset S$ 이므로 $P \subset S$ 따라서 S 는 r 이기 위한 필요조건이다.
 $Q \subset R, R \subset S, S \subset Q$ 이므로 $Q = R = S$
 $P \subset R$ 이므로 $P \subset Q$
따라서 p 는 q 이기 위한 충분조건이다.

16. 수열 $\{a_n\}$ 이 첫째항이 3, 공비가 3인 등비수열일 때,
 $\frac{a_{11} + a_{13} + a_{15} + a_{17}}{a_1 + a_3 + a_5 + a_7}$ 의 값은?

- ① 3^9 ② 3^{10} ③ 3^{11} ④ 3^{12} ⑤ 3^{13}

해설

$$\begin{aligned} a_n &= 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n \\ \frac{3^{11} + 3^{13} + 3^{15} + 3^{17}}{3 + 3^3 + 3^5 + 3^7} \\ &= \frac{3^{10}(3 + 3^3 + 3^5 + 3^7)}{3 + 3^3 + 3^5 + 3^7} \\ &= 3^{10} \end{aligned}$$

17. 다항식 $x^9 + x^8 + \cdots + x + 1$ 을 $x - 2$ 로 나누었을 때의 나머지는?

- ① 511 ② 512 ③ 513 ④ 1023 ⑤ 1025

해설

$f(x) = x^9 + x^8 + \cdots + x + 1$ 이라 하면

$f(x)$ 를 $x - 2$ 로 나누었을 때의 나머지는 $f(2)$ 이다.

즉, $f(2) = 2^9 + 2^8 + \cdots + 2 + 1$

따라서 $f(2)$ 는 첫째항이 1, 공비가 2, 항수가 10인 등비수열의 합과 같다.

$$\therefore f(2) = \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = 2^{10} - 1 = 1023$$

18. $f(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ 일때, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}$ 을 $f(n)$ 과 $f(2n)$ 으로 나타내면?

- ① $f(2n) - f(n)$ ② $f(2n) - \frac{1}{2}f(n)$
 ③ $2f(n) - f(2n)$ ④ $f(n) - \frac{1}{2}f(2n)$
 ⑤ $3f(n) - 2f(2n)$

해설

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \\ &= \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \\ &= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} \\ &= f(2n) - \frac{1}{2} \cdot f(n) \end{aligned}$$

19. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ 이고, $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) 을 만족할 때, 일반항 a_n 을 구하면?

- ① 2^{n-1} ② 3^{n-1} ③ 4^{n-1} ④ 5^{n-1} ⑤ 6^{n-1}

해설

$a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$ 에서
 $a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n)$
 $a_{n+1} - a_n = b_n$ 으로 놓으면 $b_{n+1} = 3b_n$
이때, 수열 $\{b_n\}$ 은 공비가 3 인 등비수열이고,
 $b_1 = a_2 - a_1 = 3 - 1 = 2$ 이므로
 $b_n = 2 \cdot 3^{n-1}$
수열 $\{b_n\}$ 은 수열 $\{a_n\}$ 의 계차수열이므로
 $a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2 \cdot 3^{k-1}$
 $= 1 + \frac{2(3^{n-1} - 1)}{3 - 1} = 3^{n-1}$

20. 자연수 n 에 대하여 $\sqrt{n}$ 의 정수 부분을 $f(n)$ 이라 하자. 예를 들면,
 $f(5) = 2$ 이다. 이때, $\sum_{n=1}^{120} \frac{1}{2f(n)+1}$ 의 값은?

- ① 10 ② 12 ③ 20 ④ 24 ⑤ 36

해설

$$\begin{aligned}
 &f(1) = 1, \quad f(2) = f(3) = 1, \\
 &f(4) = f(2^2) = 2, \quad f(5) = f(6) = f(7) = f(8) = 2, \\
 &f(9) = f(3^2) = 3, \quad f(10) = f(11) = \cdots = f(15) = 3, \\
 &\vdots \\
 &f(120) = 10, \quad f(121) = f(11^2) = 11 \text{ 이므로} \\
 &\sum_{n=1}^{120} \frac{1}{2f(n)+1} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} + \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} + \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} + \frac{1}{2 \cdot 2 + 1} + \\
 &\cdots + \frac{1}{2 \cdot 10 + 1} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{5} \cdot 5 + \frac{1}{7} \cdot 7 + \cdots + \frac{1}{21} \cdot 21 \\
 &= 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = 1 \cdot 10 = 10
 \end{aligned}$$

21. $1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \cdots + \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$ 의 값을 구하면?

- ① $\frac{n}{n+1}$ ② $\frac{2n}{n+1}$ ③ $\frac{3n}{n+1}$ ④ $\frac{4n}{n+1}$ ⑤ $\frac{5n}{n+1}$

해설

$$\begin{aligned} \text{(주어진 식)} &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}} \\ &= 2 \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{2n}{n+1} \end{aligned}$$

22. 함수 $f(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{20} \frac{2k+1}{f(k)}$ 의 값은?

- ① $\frac{40}{7}$ ② $\frac{45}{8}$ ③ $\frac{17}{3}$ ④ $\frac{57}{10}$ ⑤ $\frac{63}{11}$

해설

$$\begin{aligned} f(n) &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 \\ &= \sum_{k=1}^{20} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ 옳므로} \\ \sum_{k=1}^{20} \frac{2k+1}{f(k)} &= \sum_{k=1}^{20} \frac{2k+1}{\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}} \\ &= \sum_{k=1}^{20} \frac{6}{k(k+1)} = 6 \sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 6 \left(1 - \frac{1}{21} \right) = 6 \times \frac{20}{21} = \frac{40}{7} \end{aligned}$$