1. 다음 중 명제가 아닌 것은?

① 6과 18의 최대공약수는 3 이다.

② 설악산은 제주도에 있다.

③ $x=2$ 이면 $3x=6$ 이다.

④ $x+1<0$

⑤ 삼각형의 세 내각의 크기의 합은 $180°$ 이다.

해설

명제는 참과 거짓을 명확하게 판단할 수 있는 문장이나 식을 말한다. ①, ②는 거짓 명제이고, ③, ⑤는 참인 명제이다. 그러나 ④는 x의 값에 따라서 참일 수도 있고 거짓일 수도 있으므로 명제가 아니다.

2. 다음 중 거짓인 명제는?

① 직사각형은 사다리꼴이다.

② $x > 3$ 이면 $x > 5$ 이다.

③ $a = b$ 이면 $a^3 = b^3$ 이다.

④ x가 4의 배수이면 x는 2의 배수이다.

⑤ $(x-3)(y-5) = 0$ 이면 $x = 3$ 또는 $y = 5$ 이다.

해설

반례 : $x = 4$

3. 전체집합 U 에서 조건 p, q 의 진리집합을 각각 P, Q 라 할 때, 명제 $\sim p \rightarrow q$ 가 참일 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은? (단, $U \neq \varnothing$)

① $P^c \subset Q$　　② $P \cap Q = \varnothing$　　③ $P^c \cap Q^c = \varnothing$

④ $P \cap Q^c = Q^c$　　⑤ $P \cup Q = U$

해설

$\sim p \rightarrow q$를 확인하기 위해 대우의 참, 거짓을 판별하거나 포함관계를 본다.

$P^c \subset Q$ 이려면 $(P \cup Q)^c = \varnothing$ 이어야 한다.

$\therefore P \cup Q = U, P^c \cap Q^c = \varnothing$

$P \cap Q = \varnothing$ 는 알 수 없다.

4. 다음 중 명제 '$x+y \geq 2$ 이고 $xy \geq 1$ 이면, $x \geq 1$ 이고 $y \geq 1$ 이다.' 가 거짓임을 보이는 반례는?

① $x=1,\ y=\frac{1}{2}$
② $x=100,\ y=\frac{1}{2}$
③ $x=1,\ y=1$
④ $x=2,\ y=4$
⑤ $x=-1,\ y=-5$

해설

$x+y \geq 2,\ xy \geq 1$ 는 만족하지만, $x \geq 1, y \geq 1$ 은 만족하지 않는 반례를 찾는다.

$\therefore x=100, y=\frac{1}{2}$ 일 때, 거짓이다.

5. 조건 $x < 1$ 또는 $x > 2$ 의 부정은?

① $x < 1$ 그리고 $x > 2$
② $x \leq 1$ 또는 $x \geq 2$
③ $x \geq 1$ 또는 $x \leq 2$
④ $x \leq 1$ 그리고 $x \geq 2$
⑤ $1 \leq x \leq 2$

해설

$x < 1$ 또는 $x > 2$ 의 부정은 $1 \leq x \leq 2$ 이다.

6. 전체집합 $U=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 조건 $x^2-2>0$의 진리집합은?

① $\varnothing$ ② $\{0,\ 1\}$ ③ $\{3,\ 4,\ 5\}$
④ $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ ⑤ U

해설

주어진 조건 $x^2-2>0$ 에 $x=0$을 대입하면 $0-2>0$ (거짓)
$x=1$을 대입하면 $1-2>0$ (거짓)
$x=2$를 대입하면 $4-2>0$ (참)
$x=3$을 대입하면 $9-2>0$ (참)
$x=4$를 대입하면 $16-2>0$ (참)
$x=5$를 대입하면 $25-2>0$ (참)
따라서 구하는 진리집합은 $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

7. 전체집합이 $U = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

① 조건 '$x^2 - 6x + 8 = 0$' 의 진리집합은 $\{2,\ 3\}$ 이다.

② 조건 'x 는 소수이다.' 의 진리집합은 $\{1,\ 3,\ 5\}$ 이다.

③ 조건 'x 는 4 의 약수이다.' 의 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 2,\ 4\}$ 이다.

④ 조건 '$0 \le x < 4$ 이고 $x \ne 2$ 이다.' 의 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 3\}$ 이다.

⑤ 조건 'x 는 6 의 약수이다.' 의 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 3\}$ 이다.

해설

① $x^2 - 6x + 8 = 0 \iff (x-2)(x-4) = 0 \iff x = 2$ 또는 $x = 4$, 따라서, 진리집합은 $\{2,\ 4\}$

② 소수는 2, 3, 5 이므로 진리집합은 $\{2,\ 3,\ 5\}$

③ 4 의 약수는 1, 2, 4 이므로 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 4\}$

④ $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ 이고 $x \ne 2$ 이므로 진리집합은 $\{0,\ 1,\ 3\}$

⑤ 전체집합이 $U = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 이고 6 의 약수는 1, 2, 3, 6 이므로 진리집합은 $\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$

8. 다음 중 항상 참이라고 할 수 없는 것은?

① 자연수 n에 대하여, n^2이 짝수이면 n도 짝수 이다.

② 자연수 n, m에 대하여 n^2+m^2이 홀수이면, nm은 짝수이다.

③ 자연수 n에 대하여, n^2이 3의 배수이면, n은 3의 배수이다.

④ a, b가 실수일 때, $a+b\sqrt{2}=0$이면, $a=0$이다.

⑤ 두 실수 a, b에 대하여, $a+b>2$이면, $a>1$ 또는 $b>1$

해설

①, ③ : n^2이 p의 배수이면, n은 p의 배수이다. (참)
②: 대우는 'nm 은 홀수이면 n^2+m^2 이 짝수이다.' nm은 홀수, 즉 n, m 모두 홀수이면 n^2, m^2 모두 홀수이므로 n^2+m^2은 짝수이다.
∴ 주어진 명제는 참
④ 반례 : $a=2\sqrt{2}, b=-1$
※ 주의) 주어진 명제가 참일 때는 a, b가 유리수라는 조건일 때임을 명심해야 한다.
⑤ 대우 : $a \leqq 1$ 그리고 $b \leqq 1$이면 $a+b \leqq 2$ (참)

9. 다음 중에서 참인 명제는? (단, 문자는 실수이다.)

① $x^2 = 1$이면 $x^3 = 1$이다.

② $\sqrt{(-3)^2} = -3$

③ $|x| > 0$이면 $x > 0$이다.

④ $|x+y| = |x-y|$ 이면 $xy = 0$이다.

⑤ 대각선의 길이가 같은 사각형은 직사각형이다.

해설

① $x = -1$이면 $x^2 = 1$이지만 $x^3 = -1$ 이므로 거짓인 명제이다.
② $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$ 이므로 거짓인 명제이다.
③ $x = -2$이면 $|-2| = 2 > 0$ 이지만 $-2 < 0$이므로 거짓인 명제이다.
④ $|x+y| = |x-y|$의 양변을 제곱하면 $(x+y)^2 = (x-y)^2$ $\leftrightarrow$ $x^2 + 2xy + y^2 = x^2 - 2xy + y^2 \leftrightarrow$ $xy = 0$ 따라서, 참인 명제이다.
⑤ 등변사다리꼴은 대각선의 길이가 같지만 직사각형은 아니다. 따라서, 거짓인 명제이다.

10. 명제 '$p(x)$ 이면 $q(x)$ 이다'가 참일 때, 두 집합 $P = \{x \mid p(x)\}$, $Q = \{x \mid q(x)\}$ 사이의 관계로 다음 중 옳은 것은?

① $Q \subset P$ ② $Q^c \subset P$ ③ $P \subset Q^c$

④ $P \cup Q = P$ ⑤ $P \subset Q$

해설

'$p(x)$ 이면 $q(x)$ 이다.' 가 참일 때, 즉, $p \Rightarrow q$ 이면 진리집합의 포함관계는 $P \subset Q$

11. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 한다. $\sim p \to \sim q$ 가 참일 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \cup Q = U$　② $P \cap Q = \varnothing$　③ $Q \subset P$
④ $P \subset Q$　⑤ $P = Q$

해설
$\sim p \to \sim q$ 이 참이면 $P^c \subset Q^c \Leftrightarrow P \supset Q$

해설
$\sim p \to \sim q$ 이 참이면 대우인 $q \to p$ 가 참
따라서 $Q \subset P$

12. 다음 중 '모든 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있다.'의 부정인 명제를 고르면?

① 평화시에 살고 있지 않으면 평화고등학교 학생이 아니다.

② 평화시에 사는 학생은 평화고등학교 학생이다.

③ 모든 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있지 않다.

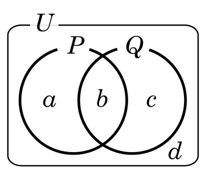
④ 평화시에 살고 있지 않은 평화고등학교 학생이 적어도 한명은 있다.

⑤ 어떤 평화고등학교 학생들은 평화시에 살고 있다.

해설

모든 ~ 이다. : (부정) ⇒ 어떤 ~ 아니다.
적어도 ~ 아니다.

13. 전체집합 U 에서 두 조건 p, q 를 만족하는 집합 P, Q 에 대하여 두 집합 P, Q 사이의 포함 관계가 다음과 같을 때, 명제 $p \rightarrow q$ 가 거짓임을 보여주는 원소는 무엇인가?



① a　　② b　　③ c　　④ d　　⑤ a와 c

해설

명제 $p \rightarrow q$ 가 참이 되려면 두 조건 p, q 를 만족하는 집합 P, Q 에 대하여 $P \subset Q$ 가 성립해야 한다. $P \subset Q \leftrightarrow x \in P$이면 $x \in Q$
P 의 원소 a 에 대하여 $a \in P$ 이나 $a \notin Q$ 이므로 $p \rightarrow q$ 는 거짓이다.

14. 다음 중에서 명제 '자연수 n 의 각 자리 숫자의 합이 6 의 배수이면, n 은 6 의 배수이다.'가 거짓임을 보여주는 n 의 값은?

① 30 ② 33 ③ 40
④ 42 ⑤ 답 없음

해설

실제로 주어진 명제는 참이 아니다. 33 의 경우 $3+3=6$ 이지만, 33 은 6 의 배수가 아니다.

15. p_n 이 다음과 같을 때, $f(p_n) = 1$ (p_n이 명제이면) $f(p_n) = -1$ (p_n이 명제가 아니면) 로 정의한다. 이 때, $f(p_1)+f(p_2)+f(p_3)$ 의 값을 구하면? (단, $n = 1, 2, 3$)

$p_1 : x^2 - x - 2 = 0$ p_2 : 16의 양의 약수는 모두 짝수이다. p_3 : $\sqrt{3}$ 은 유리수이다.

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$$f(p_n) = \begin{cases} 1 \ (p_n\text{이 명제이다.}) \\ -1 \ (p_n\text{이 명제가 아니다.}) \end{cases}$$

p_1 : $x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow$ 명제가 아니다.($\because$ x 값에 따라 참 일수도 거짓일수도 있다.)
p_2 : 거짓, p_3 : 거짓 $\rightarrow$ 모두 거짓인 명제이다.
$\therefore$ $f(p_1)+f(p_2)+f(p_3) = (-1)+1+1 = 1$

16. $a, b, c \in R$ 일 때, 조건 $a = b = c$ 의 부정을 바르게 말한 것은?

① a, b, c 는 모두 다르다.

② a, b, c 는 모두 다르지 않다.

③ a, b, c 중에는 같은 수가 있다.

④ a, b, c 중에는 0이 아닌 수가 있다.

⑤ a, b, c 중에는 다른 두 수가 있다.

해설

① : $a = b = c \Rightarrow a = b$ 이고, $b = c$ 이고, $c = a$ 이다.
부정 : $a \neq b$ 또는 $b \neq c$ 또는 $c \neq a \Rightarrow a, b, c$ 중에는 다른 두 수가 있다.

17. ‘모든 중학생은 고등학교에 진학한다’ 의 부정인 명제는?

① 고등학교에 진학하는 중학생은 없다.

② 어떤 중학생은 고등학교에 진학한다.

③ 고등학교에 진학하지 않는 중학생도 있다.

④ 모든 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다.

⑤ 어떤 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다.

해설

부정이란 ‘p 이면 q 이다’ 가 ‘p 이면 q 가 아니다’ 이고, ‘모든’ 의 부정은 ‘어떤’ 이므로 ‘모든 중학생은(p) 고등학교에 진학한다(q)’ 의 부정은 ‘어떤 중학생은 고등학교에 진학하지 않는다’ 이다.

18. 전체집합을 $U=\{-1,\ 0,\ 1\}$이라 할 때, 전체집합 U에 대하여 다음 중 참인 명제는?

① 모든 x에 대하여 $x^2>1$이다.

② 임의의 x, y에 대하여 $x+y\le 1$이다.

③ 어떠한 x에 대하여도 $x^2+2x\ge -1$ 이다.

④ 적당한 x, y에 대하여 $x^2-y^2>1$이다.

⑤ $x^2+x<x^3$ 인 x가 존재한다.

해설

① 반례 : $x=0$ 일 때 $x^2=0$ 이므로 주어진 명제 는 거짓이다.
② 반례 : $x=y=1$ 일 때 $x+y=2\ge 1$ 이므로 주 어진 명제는 거짓이다.
③ 모든 x 에 대하여 $x^2+2x+1=(x+1)^2\ge 0$ 이므로 주어진 명제는 참이다.
④ 모든 x, y 에 대하여 $x^2-y^2\le 1$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.
⑤ 모든 x 에 대하여 $x^2+x\ge x^3$ 이므로 주어진 명제는 거짓이다.

19. 명제 '모든 실수 x, y, z에 대하여 $xy = yz = zx$ 이다.'를 부정한 것은?

① 모든 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz \neq zx$ 이다.

② 어떤 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$ 이고 $yz \neq zx$ 이다.

③ 모든 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$ 이고 $yz \neq zx$ 이다.

④ 어떤 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$ 이고 $yz \neq zx$ 이고 $zx \neq xy$ 이다.

⑤ 어떤 실수 x, y, z에 대하여 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$ 이다.

해설

'$xy = yz = zx$' 는 '$xy = yz$ 이고 $yz = zx$ 이고 $zx = xy$' 이므로 '$xy = yz = zx$'의 부정은 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$ 이다. 따라서 주어진 명제의 부정은 어떤 실수 x, y, z 에 대하여 $xy \neq yz$ 또는 $yz \neq zx$ 또는 $zx \neq xy$ 이다.

20. 두 조건 $p : |x-2| \le h$, $q : |x+1| \le 7$에 대하여 'p이면 q이다.'가 참이 되도록 하는 h의 최댓값을 구하여라. (단, $h \ge 0$)

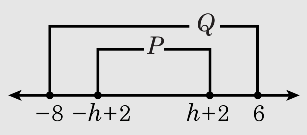
▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

p : $2-h \le x \le 2+h$

q : $-8 \le x \le 6$



$-h+2 \ge -8 \leftrightarrow h \le 10$, $h+2 \le 6 \leftrightarrow h \le 4$

$\therefore h \le 4$

$\therefore n$의 최댓값은 4

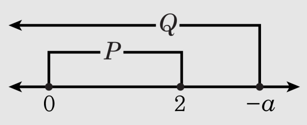
21. 실수 x에 대한 두 조건 p : $0 \le x \le 2$, q : $x + a \le 0$이 있다. 명제 $p \rightarrow q$가 참일 때, a의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라 하면 $p \rightarrow q$가 참이므로 $P \subset Q$ 이다. $P = \{x|0 \le x \le 2\}$, $Q = \{x|x \le -a\}$



위의 그림에서 $P \subset Q$이려면 $2 \le -a$, $a \le -2$ 따라서 a의 최댓값은 -2

22. 자연수 n에 대하여 $n! = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1$로 정의된다. 예를 들어, $1! = 1$, $2! = 2\times1$, $3! = 3\times2\times1 = 6$ 이다. 전체집합 $U = \{x \mid x = n!\ (n,\ x\text{는 자연수})\}$에서 두 조건 p, q가 각각 p : 일의 자리가 0인수, q : 자리수가 네 자리 이상인 수 일 때, 조건 'p 이고 $\sim q$'를 만족하는 집합의 원소의 개수는?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

'p 이고 $\sim q$' $\Rightarrow$ $P\cap Q^c = P - Q$

ⅰ) 일의 자리가 0인 수 중 네자리 미만인 수의 일의 자리가 0이기 위해서는 인수로 2, 5 를 가져야 한다.

$5! = \underline{5}\times4\times3\times\underline{2}\times1 = 120$

ⅱ) $6! = 6\times\underline{5}\times4\times3\times\underline{2}\times1 = 720$

23. 두 조건 $p : |x-k| \le 1$, $q : -7 \le x \le 3$에서 명제 $p \rightarrow q$가 참일 때, k의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① -12　② -4　③ 8　④ 4　⑤ 12

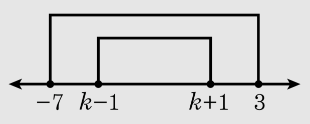
해설

$p : |x-k| \le 1$에서 $-1 \le x-k \le 1$

$\therefore k-1 \le x \le k+1 \cdots$ ㉠

$p \rightarrow q$가 참이면 ㉠이 $q : -7 \le x \le 3$에 포함되어야 한다.

수직선에 나타내면



$k-1 \ge -7 \therefore k \ge -6$

$k+1 \le 3 \therefore k \le 2$

따라서 k의 최솟값은 -6, k의 최댓값은 2 이다.

$\therefore -6+2=-4$