

1. 첫째항이 12, 공차가 -7 인 등차수열의 일반항 a_n 을 구하면?

① $-7n + 19$

② $-7n - 7$

③ $-7n - 12$

④ $7n - 5$

⑤ $7n + 12$

해설

$$a_n = 12 + (n - 1) \cdot (-7) = -7n + 19$$

2. 등차수열 $10, 6, 2, -2, -6, \dots$ 에서 공차를 d , 제 10 항을 b 라 할 때, $b + d$ 의 값은?

① -10 ② -20 ③ -30 ④ -40 ⑤ -50

해설

공차는 -4 이므로 $d = -4$

$$a_n = 10 + (n - 1)(-4) = -4n + 14$$

$$\therefore a_{10} = -4 \cdot 10 + 14 = -26 \text{ 에서 } b = -26$$

$$\therefore b + d = -26 + (-4) = -30$$

3. 세 수 -17 , x , 1 이 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

x 는 -17 과 1 의 등차중항이므로

$$2x = -17 + 1 = -16 \quad \therefore x = -8$$

4. 두 수 3, 7의 조화중항을 x , 두 수 4, 6의 조화중항을 y 라고 할 때, $x+y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$x = \frac{2 \cdot 3 \cdot 7}{3 + 7} = \frac{42}{10}, y = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{4 + 6} = \frac{48}{10}$$

$$x + y = \frac{42}{10} + \frac{48}{10} = \frac{90}{10} = 9$$

5. 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 10항까지의 합 $S_{10} = 100$ 이고, 첫째항부터 제 20항까지의 합 $S_{20} = 200$ 일 때, $a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{20}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 100

해설

S_{10} 은 첫째항부터 제10까지의 합이고, S_{20} 은 첫째항부터 제20항까지의 합이므로

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{20} &= S_{20} - S_{10} \\ &= 200 - 100 = 100 \end{aligned}$$

6. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_5 = 4a_3$, $a_2 + a_4 = 4$ 가 성립할 때, a_6 의 값은?

① 5

② 8

③ 11

④ 13

⑤ 16

해설

a_2, a_3, a_4 는 이 순서로 등차수열을 이루므로 $a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2} = 2$

$\therefore a_5 = 4a_3 = 8$

이때, 공차를 d 라 하면 $a_5 = a_3 + 2d$ 이므로

$8 = 2 + 2d \quad \therefore d = 3$

$\therefore a_6 = a_5 + d = 8 + 3 = 11$

7. 수열 $-3, a, b, c, 13$ 이 이 순서로 등차수열을 이룰 때, $a + b + c$ 의 값은?

① 10

② 15

③ 20

④ 25

⑤ 30

해설

$$a - (-3) = d$$

$$b - a = d$$

$$c - b = d$$

$$13 - c = d$$

좌변은 좌변끼리, 우변은 우변끼리

$$\text{더하면 } 13 - (-3) = 4d \therefore d = 4$$

$$\therefore a = -3 + 4 = 1$$

$$b = 1 + 4 = 5$$

$$c = 5 + 4 = 9$$

$$\therefore a + b + c = 15$$

8. 첫째항이 -25 , 공차가 3 인 등차수열에서 처음으로 양수가 되는 항은?

① 제 9 항

② 제 10 항

③ 제 11 항

④ 제 12 항

⑤ 제 13 항

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n 이라 하면

$$a_n = -25 + (n-1) \times 3 = 3n - 28$$

이때, $a_n > 0$ 을 만족시키는 n 은

$$3n - 28 > 0, \quad 3n > 28$$

$$\therefore n > \frac{28}{3} = 9.33 \dots$$

따라서 자연수 n 의 최솟값은 10 이므로 처음으로 양수가 되는 항은 제10항이다.

9. 두 수 $2p + 7$ 과 $2p + 9$ 의 등차중항이 p^2 일 때, 양수 p 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$2p + 7, p^2, 2p + 9$ 가 등차수열을 이루므로 $p^2 = \frac{(2p + 7) + (2p + 9)}{2}$

$$2p^2 = 4p + 16, p^2 - 2p - 8 = 0$$

$$(p + 2)(p - 4) = 0$$

따라서 $p = -2$ 또는 $p = 4$

이때, p 는 양수이므로 $p = 4$

10. 직각삼각형 ABC 의 세 변의 길이가 작은 것부터 순서대로 $4, a, b$ 이고 이 순서로 등차수열을 이룬다고 한다. 이때, 직각삼각형의 넓이는?

- ① $\frac{8}{3}$
- ② $\frac{16}{3}$
- ③ $\frac{32}{3}$
- ④ $\frac{40}{3}$
- ⑤ $\frac{64}{3}$

해설

$4 < a < b$ 이고, $4, a, b$ 가 직각삼각형의 세 변의 길이이므로
 $4^2 + a^2 = b^2 \cdots \textcircled{\text{㉠}}$
또, $4, a, b$ 가 이 순서로 등차수열을 이루므로
 $2a = 4 + b, b = 2a - 4 \cdots \textcircled{\text{㉡}}$
 $\textcircled{\text{㉡}}$ 를 $\textcircled{\text{㉠}}$ 에 대입하면
 $4^2 + a^2 = (2a - 4)^2, 16 + a^2 = 4a^2 - 16a + 16$
 $3a^2 - 16a = 0, a(3a - 16) = 0$
 $\therefore a = \frac{16}{3}$
 $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$

11. 공차가 $d_1 (d_1 \neq 0)$ 인 등차수열
 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots$ 에 대하여 두 수열
 $a_1 + a_2, a_3 + a_4, a_5 + a_6, a_7 + a_8, \dots$
 $a_1 + a_2 + a_3, a_4 + a_5 + a_6, a_7 + a_8 + a_9, \dots$ 의 공차를 각각 d_2, d_3
라고 할 때, 다음 중 옳은 것은?
- ① $2d_2 = 3d_3$ ② $3d_2 = 2d_3$ ③ $5d_2 = 2d_3$
④ $7d_2 = 3d_3$ ⑤ $9d_2 = 4d_3$

해설

첫째 수열은 $2a_1 + d_1, 2a_1 + 5d_1, 2a_1 + 9d_1, \dots$ 이므로 공차가 $d_2 = 4d_1$ 이고
둘째 수열은 $3a_1 + 3d_1, 3a_1 + 12d_1, 3a_1 + 21d_1, \dots$ 이므로
공차가 $d_3 = 9d_1$ 이다.
 $\therefore 9d_2 = 4d_3$

12. 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 의 공차가 각각 -2 , 3 일 때, 등차수열 $\{3a_n + 5b_n\}$ 의 공차는?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 9 ⑤ 15

해설

수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 수열 $\{b_n\}$ 의 첫째항을 b 라고 할 때,

$$3a_n + 5b_n$$

$$= 3\{a + (n-1) \times (-2)\} + 5\{b + (n-1) \times 3\}$$

$$= 3a - 6(n-1) + 5b + 15(n-1)$$

$$= 3a + 5b + 9(n-1)$$

따라서 수열 $\{3a_n + 5b_n\}$ 은 첫째항이 $3a + 5b$ 이고, 공차가 9인 등차수열이다.

13. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 이 공차가 각각 2, 3인 등차수열일 때, 수열 $\{a_n + b_n\}$ 의 공차는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot 2$$

$$b_n = b_1 + (n - 1) \cdot 3$$

$$a_n + b_n = a_1 + b_1 + (n - 1) \cdot 5$$

$$\therefore \text{공차} = 5$$

14. 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 에 대하여 $a_1 = b_1, a_5 = b_7, b_{22} = 10$ 일 때, $a_k = 10$ 을 만족시키는 양의 정수 k 의 값은? (단, $a_1 \neq 10$)

- ① 12
- ② 14
- ③ 15
- ④ 21
- ⑤ 22

해설

$\{a_n\}$ 의 공차를 $x, \{b_n\}$ 의 공차를 y 라 하면
 $a_n = a_1 + (n - 1)x$
 $b_n = b_1 + (n - 1)y$
 $a_1 + 4x = b_1 + 6y$
 $\therefore y = \frac{2}{3}x$
 $b_{22} = b_1 + 21y = 10$
 $a_k = a_1 + (k - 1)x = 10$
 $a_1 = b_1$ 이므로 $a_1 = 10 - 21y$
 $10 - 21y + (k - 1)x = 10$
 $y = \frac{2}{3}x$ 이므로
 $10 - 14x + (k - 1)x = 10$
 $-14x + (k - 1)x = 0$
 $(k - 15)x = 0$
(i) $x \neq 0$ 일 때, $k = 15$
(ii) $x = 0$ 일 때 $y = 0$ 이므로 $b_{22} = \cdots = b_1 = 10$
 $b_1 = a_1$ 이므로 $a_1 = 10$
그런데 $a_1 \neq 10$ 이 아니므로
 $x = 0$ 이 될 수 없다.
 $\therefore k = 15$

15. 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_4 + a_7 + a_{10} = 11$, $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 20$ 일 때, a_{50} 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$a_n = a + (n - 1)d$ 라고 하면

$$a_4 + a_7 + a_{10} = 3a + 18d = 11$$

$$a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 5a + 35d = 20$$

$$\therefore a = \frac{5}{3}, d = \frac{1}{3}$$

$$\therefore a_{50} = 18$$

16. 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 20$, $a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 68$ 일 때, 첫째항과 공차의 곱은?

① $\frac{3}{2}$

② 2

③ $\frac{5}{2}$

④ 3

⑤ $\frac{7}{2}$

해설

$$S_4 = \frac{4(2a + 3d)}{2} = 20$$

$$S_8 - S_4 = \frac{8(2a + 7d)}{2} - 20 = 68$$

$$2a + 3d = 10, \quad 2a + 7d = 22$$

두 식을 변끼리 빼면

$$4d = 12, \quad d = 3$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a \times d = \frac{3}{2}$$

17. 100 이상 200 이하의 자연수 중에서 3 또는 5의 배수인 것들의 총합을 S 라 할 때, $\frac{S}{150}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 47

해설

$$\begin{aligned} S &= (3\text{의 배수의 총합}) + (5\text{의 배수의 총합}) - (15\text{의 배수의 총합}) \\ &= (102 + 105 + 108 + \cdots + 198) + (100 + 105 + 110 + \cdots + 200) - (105 + 120 + 135 + \cdots + 195) \\ &= \frac{33(102 + 198)}{2} + \frac{21(100 + 200)}{2} \\ &\quad - \frac{7(105 + 195)}{2} \\ &= 47 \cdot 150 \\ \therefore \frac{1}{150} S &= 47 \end{aligned}$$

18. 첫째항이 $-\frac{5}{2}$ 이고, 공차가 $\frac{1}{3}$ 인 등차수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 최소가 되게 하는 n 의 값은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

해설

첫째항이 $-\frac{5}{2}$ 이고, 공차가 $\frac{1}{3}$ 인 등차수열의 일반항을 a_n 이라

$$\text{하면 } a_n = -\frac{5}{2} + (n+1) \cdot \frac{1}{3} = \frac{n}{3} - \frac{17}{6}$$

이때, S_n 이 최소가 되려면 음수인 항만 더하면 되므로

$$\frac{n}{3} - \frac{17}{6} < 0 \quad \therefore n < \frac{17}{2} = 8.5$$

따라서 S_n 이 최소가 되게 하는 n 의 값은 8이다.

19. 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 $S_n = 2n^2 + n + \alpha$ 인 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 α 의 값은?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$S_n = 2n^2 + n + \alpha$ 에서

(i) $n = 1$ 일 때 $S_1 = a_1 = 2 + 1 + \alpha = 3 + \alpha$

(ii) $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 + n + \alpha - \{2(n-1)^2 + (n-1) + \alpha\} \\ &= 4n - 1 \end{aligned}$$

그런데 첫째항부터 등차수열을 이루려면

$$3 + \alpha = 4 \cdot 1 - 1$$

$$\therefore \alpha = 0$$

20. 1과 10사이에 각각 10개, 20개의 항을 나열하여 만든 두 수열

$1, a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{10}, 10$
$1, b_1, b_2, b_3, \cdots, b_{20}, 10$

이 모두 등차수열을 이룰 때, $\frac{a_{10}-a_1}{b_{10}-b_1}$ 의 값은?

- ① $\frac{10}{21}$
- ② $\frac{10}{20}$
- ③ $\frac{20}{11}$
- ④ $\frac{21}{11}$
- ⑤ 2

해설

$$a'_n = 1 + (n - 1) \times d$$

$$a'_{12} = 1 + 11d = 10$$

$$d = \frac{9}{11}$$

$$\therefore a'_n = 1 + (n - 1) \times \frac{9}{11}$$

$$b'_n = 1 + (n - 1) \times d$$

$$b'_{22} = 1 + 21d = 10$$

$$d = \frac{9}{21}$$

$$\therefore b'_n = 1 + (n - 1) \times \frac{9}{21}$$

$$\frac{a_{10}-a_1}{b_{10}-b_1} = \frac{a'_{11}-a'_2}{b'_{11}-b'_2} = \frac{9 \cdot \frac{9}{11}}{9 \cdot \frac{9}{21}} = \frac{21}{11}$$

21. 첫째항이 50 이고, 공차가 -4 인 등차수열은 첫째항부터 몇 제항까지의 합이 최대가 되는지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13 번째 항

해설

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n \{ 2 \cdot 50 + (n-1) \cdot (-4) \}}{2} \\ &= \frac{n(100 - 4n + 4)}{2} \\ &= \frac{n(-4n + 104)}{2} \\ &= n(-2n + 52) \\ &= -2n^2 + 52n \\ &= -2(n^2 - 26n + 13^2 - 13^2) \\ &= -2(n - 13)^2 + 2 \times 13^2 \end{aligned}$$

$\therefore n = 13$ 일 때 최대