1. 첫째항이 12, 공차가 -7 인 등차수열의 일반항 a_n 을 구하면?

① $-7n+19$ ② $-7n-7$ ③ $-7n-12$

④ $7n-5$ ⑤ $7n+12$

해설

$a_n = 12 + (n-1)\cdot(-7) = -7n+19$

2. 등차수열 10, 6, 2, -2, $-6, \cdots$ 에서 공차를 d, 제 10항을 b라 할 때, $b+d$의 값은?

① -10 ② -20 ③ -30 ④ -40 ⑤ -50

해설

공차는 -4이므로 $d=-4$

$a_n = 10 + (n-1)(-4) = -4n + 14$

$\therefore a_{10} = -4 \cdot 10 + 14 = -26$에서 $b = -26$

$\therefore\ b + d = -26 + (-4) = -30$

3. 세 수 -17, x, 1이 이 순서로 등차수열을 이룰 때, x의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -8

해설

x는 -17과 1의 등차중항이므로

$2x = -17 + 1 = -16 \quad \therefore \ x = -8$

4. 두 수 3, 7의 조화중항을 x, 두 수 4, 6의 조화중항을 y라고 할 때, $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$x = \frac{2 \cdot 3 \cdot 7}{3+7} = \frac{42}{10},\ y = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6}{4+6} = \frac{48}{10}$$

$$x+y = \frac{42}{10} + \frac{48}{10} = \frac{90}{10} = 9$$

5. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 10항까지의 합 $S_{10} = 100$이고, 첫째항부터 제 20항까지의 합 $S_{20} = 200$일 때, $a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{20}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 100

해설

S_{10}은 첫째항부터 제10까지의 합이고, S_{20}은 첫째항부터 제20항까지의 합이므로

$a_{11} + a_{12} + a_{13} + \cdots + a_{20} = S_{20} - S_{10}$

$= 200 - 100 = 100$

6. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 = 4a_3$, $a_2 + a_4 = 4$가 성립할 때, a_6의 값은?

① 5　　② 8　　③ 11　　④ 13　　⑤ 16

해설

a_2, a_3, a_4는 이 순서로 등차수열을 이루므로 $a_3 = \dfrac{a_2 + a_4}{2} = 2$

$\therefore\ a_5 = 4a_3 = 8$

이때, 공차를 d라 하면 $a_5 = a_3 + 2d$이므로

$8 = 2 + 2d \quad \therefore\ d = 3$

$\therefore\ a_6 = a_5 + d = 8 + 3 = 11$

7. 수열 $-3,\ a,\ b,\ c,\ 13$이 이 순서로 등차수열을 이룰 때, $a+b+c$의 값은?

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

해설

$a-(-3)=d$

$b-a=d$

$c-b=d$

$13-c=d$

좌변은 좌변끼리, 우변은 우변끼리

더하면 $13-(-3)=4d \quad \therefore d=4$

$\therefore a=-3+4=1$

$b=1+4=5$

$c=5+4=9$

$\therefore a+b+c=15$

8. 첫째항이 -25, 공차가 3인 등차수열에서 처음으로 양수가 되는 항은?

① 제 9항　② 제 10항　③ 제 11항

④ 제 12항　⑤ 제 13항

해설

주어진 수열의 일반항을 a_n이라 하면

$a_n = -25 + (n-1) \times 3 = 3n - 28$

이때, $a_n > 0$을 만족시키는 n은

$3n - 28 > 0,\ 3n > 28$

$\therefore\ n > \dfrac{28}{3} = 9.33\cdots$

따라서 자연수 n의 최솟값은 10이므로 처음으로 양수가 되는 항은 제10항이다.

9. 두 수 $2p+7$과 $2p+9$의 등차중항이 p^2일 때, 양수 p의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$2p+7,\ p^2,\ 2p+9$가 등차수열을 이루므로 $p^2 = \dfrac{(2p+7)+(2p+9)}{2}$

$2p^2 = 4p+16,\ p^2-2p-8=0$

$(p+2)(p-4)=0$

따라서 $p=-2$ 또는 $p=4$

이때, p는 양수이므로 $p=4$

10. 직각삼각형 ABC의 세 변의 길이가 작은 것부터 순서대로 4, a, b이고 이 순서로 등차수열을 이룬다고 한다. 이때, 직각삼각형의 넓이는?

① $\frac{8}{3}$ ② $\frac{16}{3}$ ③ $\frac{32}{3}$ ④ $\frac{40}{3}$ ⑤ $\frac{64}{3}$

해설

$4 < a < b$이고, 4, a, b가 직각삼각형의 세 변의 길이이므로

$4^2 + a^2 = b^2 \cdots$ ㉠

또, 4, a, b가 이 순서로 등차수열을 이루므로

$2a = 4 + b$, $b = 2a - 4 \cdots$ ㉡

㉡를 ㉠에 대입하면

$4^2 + a^2 = (2a-4)^2$, $16 + a^2 = 4a^2 - 16a + 16$

$3a^2 - 16a = 0$, $a(3a-16) = 0$

$\therefore\ a = \frac{16}{3}$

$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$

11. 공차가 $d_1(d_1 \neq 0)$ 인 등차수열
$a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5,\ a_6,\ \cdots$ 에 대하여 두 수열
$a_1+a_2,\ a_3+a_4,\ a_5+a_6,\ a_7+a_8,\cdots$
$a_1+a_2+a_3,\ a_4+a_5+a_6,\ a_7+a_8+a_9,\cdots$ 의 공차를 각각 d_2, d_3 라고 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $2d_2=3d_3$　② $3d_2=2d_3$　③ $5d_2=2d_3$
④ $7d_2=3d_3$　⑤ $9d_2=4d_3$

해설

첫째 수열은 $2a_1+d_1,\ 2a_1+5d_1,\ 2a_1+9d_1,\ \cdots$ 이므로 공차가 $d_2=4d_1$ 이고
둘째 수열은 $3a_1+3d_1,\ 3a_1+12d_1,\ 3a_1+21d_1,\ \cdots$ 이므로 공차가 $d_3=9d_1$ 이다.
$\therefore\ 9d_2=4d_3$

12. 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차가 각각 -2, 3일 때, 등차수열 $\{3a_n+5b_n\}$의 공차는?

① 4　② 6　③ 8　④ 9　⑤ 15

해설

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항을 b라고 할 때,

$$
\begin{aligned}
&3a_n+5b_n \\
&=3\left\{a+(n-1)\times(-2)\right\}+5\left\{b+(n-1)\times 3\right\} \\
&=3a-6(n-1)+5b+15(n-1) \\
&=3a+5b+9(n-1)
\end{aligned}
$$

따라서 수열 $\{3a_n+5b_n\}$은 첫째항이 $3a+5b$이고, 공차가 9인 등차수열이다.

13. 두 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$이 공차가 각각 $2, 3$인 등차수열일 때, 수열 $\{a_n + b_n\}$의 공차는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot 2$$
$$b_n = b_1 + (n-1) \cdot 3$$
$$a_n + b_n = a_1 + b_1 + (n-1) \cdot 5$$
$\therefore$ 공차$= 5$

14. 등차수열 $\{a_n\}, \{b_n\}$에 대하여 $a_1 = b_1$, $a_5 = b_7$, $b_{22} = 10$일 때, $a_k = 10$을 만족시키는 양의 정수 k의 값은? (단, $a_1 \neq 10$)

① 12 ② 14 ③ 15 ④ 21 ⑤ 22

해설

$\{a_n\}$의 공차를 x, $\{b_n\}$의 공차를 y라 하면

$a_n = a_1 + (n-1)x$

$b_n = b_1 + (n-1)y$

$a_1 + 4x = b_1 + 6y$

$\therefore y = \frac{2}{3}x$

$b_{22} = b_1 + 21y = 10$

$a_k = a_1 + (k-1)x = 10$

$a_1 = b_1$이므로 $a_1 = 10 - 21y$

$10 - 21y + (k-1)x = 10$

$y = \frac{2}{3}x$이므로

$10 - 14x + (k-1)x = 10$

$-14x + (k-1)x = 0$

$(k-15)x = 0$

(i) $x \neq 0$일 때, $k = 15$

(ii) $x = 0$일 때 $y = 0$이므로 $b_{22} = \cdots = b_1 = 10$

$b_1 = a_1$이므로 $a_1 = 10$

그런데 $a_1 \neq 10$이 아니므로

$x = 0$이 될 수 없다.

$\therefore k = 15$

15. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_4 + a_7 + a_{10} = 11$, $a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 20$ 일 때, a_{50}의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 18

해설

$a_n = a + (n-1)d$라고 하면

$a_4 + a_7 + a_{10} = 3a + 18d = 11$

$a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 5a + 35d = 20$

$\therefore\ a = \frac{5}{3},\ d = \frac{1}{3}$

$\therefore\ a_{50} = 18$

16. 등차수열 $\{a_n\}$에서 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 20,\ a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 68$ 일 때, 첫째항과 공차의 곱은?

① $\frac{3}{2}$　② 2　③ $\frac{5}{2}$　④ 3　⑤ $\frac{7}{2}$

해설

$$S_4 = \frac{4(2a+3d)}{2} = 20$$

$$S_8 - S_4 = \frac{8(2a+7d)}{2} - 20$$
$$= 68$$

$2a + 3d = 10,\ 2a + 7d = 22$

두 식을 변끼리 빼면

$4d = 12,\quad d = 3$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a \times d = \frac{3}{2}$$

17. 100 이상 200 이하의 자연수 중에서 3 또는 5 의 배수인 것들의 총합을 S 라 할 때, $\dfrac{S}{150}$ 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 47

해설

S = (3의 배수의 총합)+(5의 배수의 총합)−(15의 배수의 총합)

$= (102 + 105 + 108 + \cdots + 198) + (100 + 105 + 110 + \cdots + 200) - (105 + 120 + 135 + \cdots + 195)$

$= \dfrac{33(102 + 198)}{2} + \dfrac{21(100 + 200)}{2} - \dfrac{7(105 + 195)}{2}$

$= 47 \cdot 150$

$\therefore \dfrac{1}{150}S = 47$

18. 첫째항이 $-\frac{5}{2}$ 이고, 공차가 $\frac{1}{3}$ 인 등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n이 최소가 되게 하는 n의 값은?

① 8　　② 9　　③ 10　　④ 11　　⑤ 12

해설

첫째항이 $-\frac{5}{2}$ 이고, 공차가 $\frac{1}{3}$ 인 등차수열의 일반항을 a_n 이라 하면 $a_n = -\frac{5}{2} + (n+1) \cdot \frac{1}{3} = \frac{n}{3} - \frac{17}{6}$

이때, S_n이 최소가 되려면 음수인 항만 더하면 되므로

$$\frac{n}{3} - \frac{17}{6} < 0 \quad \therefore\ n < \frac{17}{2} = 8.5$$

따라서 S_n이 최소가 되게 하는 n의 값은 8이다.

19. 첫째항부터 제 n항까지의 합이 $S_n = 2n^2 + n + \alpha$인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 α의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$S_n = 2n^2 + n + \alpha$에서

(i) $n = 1$일 때 $S_1 = a_1 = 2 + 1 + \alpha = 3 + \alpha$

(ii) $n \geq 2$일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 2n^2 + n + \alpha - \left\{2(n-1)^2 + (n-1) + \alpha\right\} \\ &= 4n - 1 \end{aligned}$$

그런데 첫째항부터 등차수열을 이루려면

$3 + \alpha = 4 \cdot 1 - 1$

$\therefore \ \alpha = 0$

20. 1과 10사이에 각각 10개, 20개의 항을 나열하여 만든 두 수열

$1,\ a_1,\ a_2,\ a_3, \cdots,\ a_{10},\ 10$ $1,\ b_1,\ b_2,\ b_3, \cdots,\ b_{20},\ 10$

이 모두 등차수열을 이룰 때, $\dfrac{a_{10}-a_1}{b_{10}-b_1}$ 의 값은?

① $\dfrac{10}{21}$ ② $\dfrac{10}{20}$ ③ $\dfrac{20}{11}$ ④ $\dfrac{21}{11}$ ⑤ 2

해설

$a'_n = 1 + (n-1) \times d$

$a'_{12} = 1 + 11d = 10$

$d = \dfrac{9}{11}$

$\therefore a'_n = 1 + (n-1) \times \dfrac{9}{11}$

$b'_n = 1 + (n-1) \times d$

$b'_{22} = 1 + 21d = 10$

$d = \dfrac{9}{21}$

$\therefore b'_n = 1 + (n-1) \times \dfrac{9}{21}$

$$\frac{a_{10}-a_1}{b_{10}-b_1} = \frac{a'_{11}-a'_2}{b'_{11}-b'_2} = \frac{9 \cdot \frac{9}{11}}{9 \cdot \frac{9}{21}} = \frac{21}{11}$$

21. 첫째항이 50 이고, 공차가 -4 인 등차수열은 첫째항부터 몇 째항까지의 합이 최대가 되는지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13 번째 항

해설

$$S_n = \frac{n\left\{2 \cdot 50 + (n-1) \cdot (-4)\right\}}{2}$$
$$= \frac{n(100 - 4n + 4)}{2}$$
$$= \frac{n(-4n + 104)}{2}$$
$$= n(-2n + 52)$$
$$= -2n^2 + 52n$$
$$= -2(n^2 - 26n + 13^2 - 13^2)$$
$$= -2(n-13)^2 + 2 \times 13^2$$

$\therefore n = 13$ 일 때 최대