1. 등식 $ax^2-(2a+c)x-1=(b-2)x^2+(b+3)x-c$가 x에 대한 항등식이 되도록 상수 a,b,c를 정할 때, $a^2+b^2+c^2$의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

(준식)$=(a-b+2)x^2-(2a+c+b+3)x-1+c=0$
이 식이 x에 대한 항등식이므로
$a-b+2=0,\ 2a+c+b+3=0,\ c=1$
$\Rightarrow a=-2,\ b=0,\ c=1$
$\therefore a^2+b^2+c^2=5$

2. 다음 식이 x에 대한 항등식이 되도록 A, B의 값을 정할 때, $A+B$의 값을 구하여라.

$$4x-6=A(x+1)-B(x-1)$$

▶ 답:

▷ 정답: -6

해설

x에 대한 항등식이므로 x의 값에 관계없이 항상 성립한다.
따라서 $x=-1$을 양변에 대입하면,
$4\times(-1)-6=A(-1+1)-B(-1-1)$
$-10=2B \quad \therefore\ B=-5$
또, $x=1$을 양변에 대입하면,
$4\times1-6=A(1+1)-B(1-1)$
$-2=2A \quad \therefore\ A=-1$
$\therefore\ A=-1,\ B=-5$
$\therefore\ A+B=-6$

해설

우변을 전개해서 내림차순으로 정리하면,
$4x-6=(A-B)x+A+B$
$\therefore A+B=-6$

3. $3x^4 - x^2 - 2$를 인수분해 하여라.

① $(3x^2 - 2)(x + 1)(x - 1)$ ② $(3x^2 + 2)(x - 1)(x - 1)$

③ $(3x^2 + 2)(x + 1)(x + 1)$ ④ $(3x^2 + 3)(x + 1)(x - 1)$

⑤ $(3x^2 + 2)(x + 1)(x - 1)$

해설

$A = x^2$로 치환하면

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= 3A^2 - A - 2 \\ &= (3A + 2)(A - 1) \\ &= (3x^2 + 2)(x + 1)(x - 1)\end{aligned}$$

4. $(a+b-c)(a-b+c)$를 전개하면?

① $a^2+b^2-c^2-2bc$　② $a^2-b^2+c^2-2bc$

③ $a^2+b^2-c^2+2ab$　④ $a^2-b^2-c^2+2bc$

⑤ $a^2-b^2-c^2-2ab$

해설

$(a+b-c)(a-b+c)$
$=\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}$
$=a^2-(b-c)^2$
$=a^2-b^2-c^2+2bc$

5. $(x^3+ax+2)(x^2+bx+2)$를 전개했을 때, x^2과 x^3의 계수를 모두 0이 되게 하는 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ $\frac{3}{2}$

해설

$(x^3+ax+2)(x^2+bx+2)$
$=x^5+bx^4+(a+2)x^3+(ab+2)x^2+(2a+2b)x+4$
(x^2의 계수)=(x^3의 계수)=0이므로
$ab+2=0,\ a+2=0$
따라서 $a=-2,\ b=1$
$\therefore a+b=-1$

6. 다항식 x^3+ax^2+bx-1이 x^2-3x+2로 나누어 떨어지도록 상수 $a+b$의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$f(x)=x^3+ax^2+bx-1$ 로 놓으면
$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$, $x-2$ 로 나누어 떨어진다.
$f(1)=1+a+b-1=0$ 즉, $a+b=0\cdots$㉠
$f(2)=8+4a+2b-1=0$ 즉, $4a+2b=-7\cdots$㉡
㉠, ㉡으로부터 $a=-\frac{7}{2}$, $b=\frac{7}{2}$
$\therefore a+b=0$

7. 다음 중 다항식 $a^3 - a^2b + ab^2 + ac^2 - b^3 - bc^2$ 의 인수인 것은?

① $a + c$　② $a - b^2$　③ $a^2 - b^2 + c^2$

④ $a^2 + b^2 + c^2$　⑤ $a^2 + b^2 - c^2$

해설

$a^3 - a^2b + ab^2 + ac^2 - b^3 - bc^2$
$= a^3 - b^3 + (a - b)c^2 - ab(a - b)$
$= (a - b)(a^2 + ab + b^2) + (a - b)c^2 - ab(a - b)$
$= (a - b)(a^2 + ab + b^2 + c^2 - ab)$
$= (a - b)(a^2 + b^2 + c^2)$

8. 자연수 $N = p^n q^m r^l$ 로 소인수분해될 때, 양의 약수의 개수는 $(n+1)(m+1)(l+1)$ 이다. 이 때, $38^3 + 3 \cdot 38^2 + 3 \cdot 38 + 1$ 의 양의 약수의 개수는?

① 9 개 ② 12 개 ③ 16 개 ④ 24 개 ⑤ 32 개

해설

$38 = x$ 라 하면,

$$\begin{aligned} 38^3 + 3 \cdot 38^2 + 3 \cdot 38 + 1 &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ &= (x+1)^3 \\ &= 39^3 \\ &= 13^3 \cdot 3^3 \end{aligned}$$

$\therefore \quad (3+1)(3+1) = 16$

9. 두 다항식 $A = a + 2b$, $B = 2a + 3b$일 때, $2A + B$를 구하는 과정에서 사용된 연산법칙 중 옳지 <u>않은</u> 것을 골라라.

$$
\begin{aligned}
2A + B &= 2(a + 2b) + (2a + 3b) \\
&= (2a + 4b) + (2a + 3b) && \text{㉠ 분배법칙} \\
&= 2a + (4b + 2a) + 3b && \text{㉡ 결합법칙} \\
&= 2a + (2a + 4b) + 3b && \text{㉢ 교환법칙} \\
&= (2a + 2a) + (4b + 3b) && \text{㉣ 교환법칙} \\
&= (2 + 2)a + (4 + 3)b && \text{㉤ 분배법칙} \\
&= 4a + 7b
\end{aligned}
$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

해설

㉣ $2a + (2a + 4b) + 3b = (2a + 2a) + (4b + 3b)$: 결합법칙

10. x 에 대한 다항식 x^3+ax^2+bx+2 를 x^2-x+1 로 나눈 나머지가 $x+3$ 이 되도록 a, b 의 값을 정할 때, ab 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $ab=-6$

해설

검산식을 사용

$x^3+ax^2+bx+2=(x^2-x+1)\cdot A+(x+3)$

$A=(x+p)$

$x^3+ax^2+bx+2-(x+3)=(x^2-x+1)(x+p)$

$x^3+ax^2+(b-1)x-1=(x^2-x+1)(x-1)\ \therefore p=-1$

우변을 정리하면

$\therefore\ a=-2,\ b=3$

$\therefore ab=-6$

11. 다음 중 식의 전개가 바르지 않은 것을 고르면?

① $(1-x)(1+x+x^2)=1-x^3$

② $(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)=x^4+x^2y^2+y^4$

③ $(x-3)(x-2)(x+1)(x+2)=x^4-8x^2+12$

④ $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)=a^8-b^8$

⑤ $(a+b-c)(a-b+c)=a^2-b^2-c^2+2bc$

해설

$$\begin{aligned}&(x-3)(x-2)(x+1)(x+2)\\&=(x^2-x-6)(x^2-x-2)\\&x^2-x=Y\text{라 놓자.}\\&(Y-6)(Y-2)=Y^2-8Y+12\\&\qquad=(x^2-x)^2-8(x^2-x)+12\\&\qquad=x^4-2x^3-7x^2+8x+12\end{aligned}$$

12. 대각선의 길이가 28이고, 모든 모서리의 길이의 합이 176인 직육면체의 겉넓이를 구하려 할 때, 다음 중에서 사용되는 식은?

① $(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$

② $\frac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

③ $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

④ $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$

⑤ $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

해설

직육면체의 대각선의 길이가 28 이므로
가로를 a, 세로를 b, 높이를 c 라고 했을 때
$(a^2+b^2)+c^2 = 28^2$
모든 모서리의 길이의 합이 176이므로
$a+b+c = 44$
따라서 ③번과 같은 식을 사용하여 겉넓이를 구할 수 있다.

13. 두 다항식 $f(x), g(x)$ 에 대하여 $f(x)+g(x)$ 를 $x+1$ 로 나누면 나누어 떨어지고, $f(x)-g(x)$ 를 $x+1$ 로 나누면 나머지가 2이다. 다음 [보기] 의 다항식 중에서 $x+1$ 로 나누어 떨어지는 것을 모두 고르면?

㉠ $x+f(x)$	㉡ $x-g(x)$
㉢ $x+f(x)g(x)$	

① ㉠ ② ㉢ ③ ㉠,㉡
④ ㉠,㉢ ⑤ ㉠,㉡,㉢

해설

$f(x)+g(x)=(x+1)Q(x)$
$f(x)-g(x)=(x+1)Q'(x)+2$
$x=-1$ 을 두 식에 각각 대입하면
$f(-1)+g(-1)=0\cdots$①
$f(-1)-g(-1)=2\cdots$②
①, ②을 연립하여 풀면 $f(-1)=1, g(-1)=-1$
보기의 식 중에서 $x+1$ 로 나누어 떨어지는 것은 $x=-1$ 을 대입하면 식의 값이 0 이 된다.
㉠ $-1+f(-1)=-1+1=0$
㉡ $-1-g(-1)=-1+1=0$
㉢ $-1+f(-1)g(-1)=-1+1\times(-1)=-2$
∴ ㉠, ㉡

14. 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나눈 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R이라 할 때, $xf(x)+3$을 $x-1$로 나눈 몫과 나머지를 차례로 바르게 나열한 것은?

① $Q(x),\ R$ ② $Q(x),\ R+3$

③ $xQ(x), R$ ④ $xQ(x),\ R+3$

⑤ $xQ(x)+R,\ R+3$

해설

$f(x)=(x-1)Q(x)+R$

$$\begin{aligned} xf(x)+3 &= (x-1)xQ(x)+Rx+3 \\ &= (x-1)xQ(x)+R(x-1)+R+3 \\ &= (x-1)\{xQ(x)+R\}+R+3 \end{aligned}$$

$\therefore$ 몫 : $xQ(x)+R$, 나머지 : $3+R$

15. x^4-11x^2+1 이 $(x^2+ax+b)(x^2+3x+b)$로 인수분해될 때, $a+b$의 값은?

① -1　② -2　③ -3　④ -4　⑤ -5

해설

$$\begin{aligned}x^4-11x^2+1&=(x^2-1)^2-9x^2\\&=(x^2-1)^2-(3x)^2\\&=(x^2-3x-1)(x^2+3x-1)\\&=(x^2+ax+b)(x^2+3x+b)\end{aligned}$$

$\therefore\ a=-3,\ b=-1$

$\therefore\ a+b=-4$