1. 다음 중 다항함수인 것을 고르면?

① $y = x^2 - 3x + 5$　　② $y = \frac{1}{x^2}$

③ $y^2 = x$　　④ $\frac{1}{y} = x$

⑤ $xy = 2$

해설

① $y = x^2 - 3x + 5$ 는 x에 대한 다항식이므로 다항함수이다.

② $y = \frac{1}{x^2}$ 은 x에 대한 다항식이 아니므로 다항함수가 아니다.

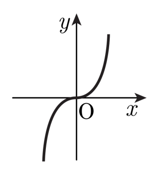
③ $y^2 = x$ 는 $y = \pm\sqrt{x}$ 와 같이 나타내어지고 이 것은 x에 대한 다항식이 아니므로 다항함수가 아니다.

④ $\frac{1}{y} = x$는 $y = \frac{1}{x}$ 과 같이 나타내어지고 이것은 x에 대한 다항식이 아니므로 다항함수가 아니다.

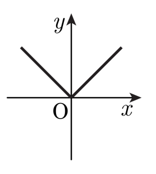
⑤ $xy = 2$는 $y = \frac{2}{x}$ 과 같이 나타내어지고 이것은 x에 대한 다항식이 아니다.

2. 다음 중 함수의 그래프가 아닌 것은?

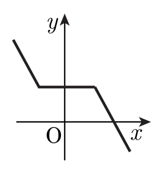
①



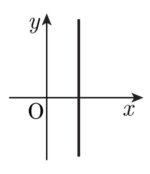
②



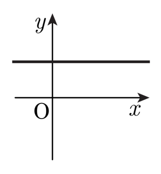
③



④



⑤



해설

함수가 되기 위한 2가지 조건

(i) 정의역에 있는 모든 원소가 빠짐없이 공역에 있는 원소에 대응되어야 한다.

(ii) 정의역에 있는 각각의 원소가 공역의 오직 하나의 원소에 대응되어야 한다.

④ : x 의 한 값 x_1 에 y 의 값이 무수히 많이 대응되고 있으므로 함수가 될 수 없다.

3. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$에 대하여 함수 $f : X \to Y$, $f(x) = |x - 2|$ 으로 주어질 때, 다음 중 $\left\{f(x) | x \in X\right\}$ 의 원소가 <u>아닌</u> 것은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

정의역을 X로 하는 $f(x)$의 치역은 $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

4. 삼차함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 에 대하여 $g(x) = (x+1)f(x) - 24x$ 로 정의 한다.
$g(0) = g(1) = g(2) = g(3) = 0$ 일 때, $f(4)$ 의 값은 ?

① 20 ② 22 ③ 24 ④ 26 ⑤ 28

해설

$g(0) = g(1) = g(2) = g(3) = 0$ 이므로
$g(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$ 이 된다.
즉, $(x+1)f(x) - 24x = x(x-1)(x-2)(x-3)$
이 식에 $x = 4$ 를 대입하면
$5f(4) - 24 \cdot 4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
$\therefore f(4) = 24$

5. 공집합이 아닌 두집합 X, Y에 대하여 X에서 Y로의 함수 $f(x) = x^2 - x - 3$, $g(x) = x + 5$ 에 대하여 $f = g$일 때, 정의역 X가 될 수 있는 집합의 개수는 a개이다. a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x) = g(x)$이므로 집합 X는 방정식 $f(x) = g(x)$를 만족하는 x의 값을 원소로 갖는 집합이다.

$x^2 - x - 3 = x + 5$에서 $x^2 - 2x - 8 = 0$, $(x - 4)(x + 2) = 0$

$\therefore$ $x = 4$ 또는 $x = -2$

즉, 집합 $\{-2, 4\}$의 공집합이 아닌 부분집합이 정의역 X가 될 수 있으므로 집합 X의 개수는 $2^2 - 1 = 3$(개)이다.

$\therefore a = 3$

6. 다항식 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $g(g(x))=x$ 이고 $g(1)=0$ 일 때, $g(-1)$ 의 값을 구하면?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$g(x)$ 가 n 차 다항식이라 하면
$g(g(x))$ 의 차수는 n^2 이다.
모든 실수 x 에 대하여 $g(g(x))=x$ 이므로
양변의 차수를 비교하면 $n^2=1$
$\therefore n=1$ ($\because$ n 은 자연수)
즉, $g(x)$ 는 일차다항식이므로
$g(x)=ax+b$ 라 하면 $g(1)=0$ 이므로
$a+b=0$, 즉 $b=-a$
$\therefore g(x)=ax+b=ax-a$
$g(g(x))=g(ax-a)=a(ax-a)-a$
$=a^2x-a^2-a=x$
이 식은 x 에 대한 항등식이므로
$a^2=1$, $-a^2-a=0$
$\therefore a=-1$
즉, $g(x)=-x+1$ 이므로 $g(-1)=2$

7. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 세 함수 f, g, h 에 대하여 $(h \circ g)(x) = 3x + 4$, $f(x) = x^2$ 일 때, $(h \circ (g \circ f))(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(2) &= ((h \circ g) \circ f)(2) \\ &= (h \circ g)(f(2)) \\ &= (h \circ g)(4) \\ &= 3 \times 4 + 4 = 16\end{aligned}$$

8. 함수 $f(x)=2x+6,\ g(x)=ax-1$에 대하여 $f\circ g=g\circ f$일 때, a의 값은?

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{5}{6}$　③ 1　④ 2　⑤ 6

해설

$(f\circ g)(x)=2g(x)+6=2(ax-1)+6$
$=2ax+4\ \cdots$ ㉠
$(g\circ f)(x)=af(x)-1=a(2x+6)-1$
$=2ax+6a-1\ \cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $2ax+4=2ax+6a-1$
$4=6a-1$
$\therefore\ a=\frac{5}{6}$

9. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 가 $f\left(\dfrac{3x+1}{2}\right)=6x-5$ 일 때, $f(2x+1)$ 을 구하면?

① $x-1$　　② $2x-2$　　③ $4x-2$

④ $6x-3$　　⑤ $8x-3$

해설

$\dfrac{3x+1}{2}=t$ 라 하면 $2t=3x+1$

$\therefore x=\dfrac{2t-1}{3}$

$f\left(\dfrac{3x+1}{2}\right)=6x-5$ 에서

$f(t)=6\cdot\dfrac{2t-1}{3}-5=4t-7$

$\therefore f(2x+1)=4(2x+1)-7=8x-3$

10. 두 함수 $f(x)=4x-3,\ g(x)=2x+1$ 에 대하여 $h\circ g=f$ 를 만족하는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x)=x+4$ ② $h(x)=2x-5$ ③ $h(x)=3x+2$

④ $h(x)=3x+5$ ⑤ $h(x)=5x+3$

해설

$h(x)=ax+b$ 라고 놓으면

$h\circ g=f$ 에서 $a(2x+1)+b=4x-3$

$\therefore\ 2a=4,\ a+b=-3$

이것을 풀면 $a=2,\ b=-5$

따라서 $h(x)=2x-5$

11. 함수 $f(x)=\dfrac{-3x+1}{x+3}$ 에 대하여 $f^1=f,\ f^{n+1}=f\circ f^n(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 이라 할 때, $f^{2006}(-2)+f^{2007}(-2)$ 의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$f(-2)=\dfrac{6+1}{-2+3}=7$

$f^2(-2)=f(f(-2))=f(7)=-2$

$f^3(-2)=f(f^2(-2))=f(-2)=7$

$f^4(-2)=f(f^3(-2))=f(7)=-2$

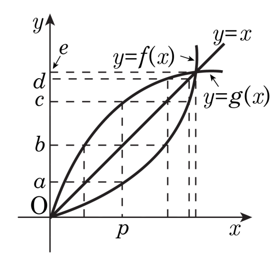
$\vdots$

$f^{2006}(-2)=-2$

$f^{2007}(-2)=7$

$\therefore\ f^{2006}(-2)+f^{2007}(-2)=-2+7=5$

12. 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, $(f \circ g)(p)$ 의 값은 얼마인가? (단, 점선은 x 축 또는 y 축에 평행하다.)



① a　　② b　　③ c

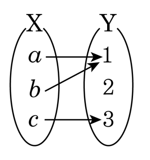
④ d　　⑤ e

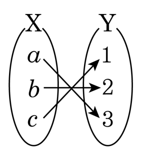
해설

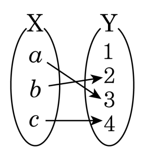
주어진 그림에서 $g(p) = c, f(c) = b$

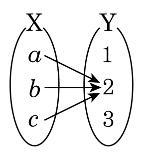
$\therefore (f \circ g)(p) = f(g(p)) = f(c) = b$

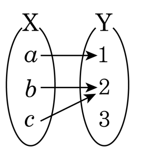
13. 다음 함수 중에서 역함수가 존재하는 것을 고르면?

①


②


③


④


⑤


해설

주어진 함수 중 일대일대응인 것은 ② 번이다.

14. 함수 $y = x - 2$의 역함수를 구하면 무엇인가?

① $y = x - 2$ ② $y = x + 2$ ③ $y = -x - 2$
④ $y = -x + 2$ ⑤ $y = \frac{1}{2}x - 1$

해설

$y = x - 2$를 x에 관해서 풀면
$x = y + 2$
x와 y를 바꾸면 $y = x + 2$

15. 함수 $f(x)=2x-5$ 의 역함수를 $y=f^{-1}(x)$ 라 할 때, $f^{-1}(-3)$ 의 값은 얼마인가?

① -3　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 3

해설

$f(x)=y=2x-5$ 에서 x 와 y 를 바꾸면 $x=2y-5$
$x=2y-5$ 를 y 에 대하여 정리하면
$y=\dfrac{1}{2}(x+5)$
$\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{1}{2}(x+5)$
$\therefore f^{-1}(-3)=1$
|다른풀이| $f^{-1}(-3)=a$ 로 놓으면
$f(a)=-3$ 에서 $f(a)=2a-5=-3$, $2a=2$
$\therefore a=f^{-1}(-3)=1$

16. $f(x) = \begin{cases} x(x \le 0) \\ x^2(x > 0) \end{cases}$, $g(x) = f(x+4)$ 로 정의한다. $h(x) = g^{-1}(x)$ 라 할 때, $h(0)$ 의 값은 ?

① -4　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 4

해설

$h(0) = g^{-1}(0) = k$

$g(k) = f(k+4) = 0$

$\therefore\ k + 4 = 0$

$\therefore\ k = -4$

$\therefore\ h(0) = -4$

17. 유한집합 X 에서 유한집합 Y 로의 함수 f 의 역함수 f^{-1} 가 존재한다고 한다. 다음 설명 중 옳지 않은 것을 고르면?

① $n(X) = n(Y)$이다.

② $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이다.

③ $y = f(x)$와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

④ $f(a) = b$ 이면 $f^{-1}(b) = a$ 이다.

⑤ $y = f(x)$ 의 정의역은 $y = f^{-1}(x)$ 의 정의역과 일치한다.

해설

⑤ (f 의 정의역) = (f^{-1} 의 치역)
(f^{-1} 의 정의역) = (f 의 치역)

18. $f(x) = x^2 - 4x + 1\ (x \geq 2)$, $g(x) = 2x - 6$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1})(4)$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$g(5) = 4$ 이므로 $g^{-1}(4) = 5$

$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ f)^{-1})(4) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1})(4) \\ &= g^{-1}(4) \\ &= 5\end{aligned}$$

19. $f(x) = -x, g(x) = 1 - \frac{2}{x}$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 를 $h(x) = \left(g^{-1} \circ f \circ g\right)(x)$ 로 정의 할 때, $(h \circ h)(x)$ 는 무엇인가?

① x ② $x+1$ ③ $x+2$ ④ $x+3$ ⑤ $x+4$

해설

$h = g^{-1} \circ f \circ g$ 에서

$$\begin{aligned} h \circ h &= (g^{-1} \circ f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f \circ g) \\ &= (g^{-1} \circ f \circ f \circ g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (h \circ h)(x) &= (g^{-1} \circ f \circ f \circ g)(x) \\ &= (g^{-1} \circ (f \circ f))(g(x)) \\ &= g^{-1}((f \circ f)(g(x)) \end{aligned}$$

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = -f(x) = -(-x) = x$ 이므로 $(h \circ h)(x) = g^{-1}(g(x)) = x$

20. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 6(x \geq 2)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① -1　② $-\sqrt{2}$　③ 1　④ $\sqrt{2}$　⑤ 2

해설

함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점은 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 그래프의 교점과 같다.

$y = x^2 - 4x + 6$ 과 $y = x$ 를 연립하면

$x^2 - 5x + 6 = 0,\ (x-2)(x-3) = 0$

$\therefore x = 2$ 또는 $x = 3$

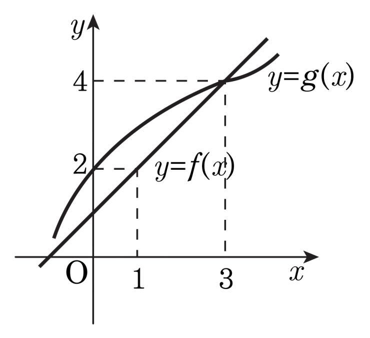
$\therefore x = 2,\ y = 2$ 또는 $x = 3,\ y = 3$

즉, 두 교점은 점 $(2,\ 2)$, $(3,\ 3)$ 이다.

따라서, 구하는 두 교점 사이의 거리는

$\sqrt{(3-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$

21. 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 각각 일대일대응이고 그 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(g^{-1}\circ f)(1)+g(3)$의 값은 얼마인가?



① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 7

해설

주어진 식을 간단히 하면

$(g^{-1}\circ f)(1)+g(3)=g^{-1}(f(1))+4$

$=g^{-1}(2)+4$

$g^{-1}(2)=k$로 놓으면 $g(k)=2$

문제의 그림에서 $y=g(x)$의 그래프가

$(0,2)$를 지나므로 $g(0)=2$

이 때, $y=g(x)$는 일대일대응이므로 $k=0$

$\therefore g^{-1}(2)+4=0+4=4$

22. 점 $(6, -2)$ 를 지나는 일차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치할 때, $f(-1)$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$f = f^{-1}$ 이므로 $(f \circ f)(x) = x$
$f(x) = a(x-6) - 2 = ax - 6a - 2 (a \neq 0)$ 로 놓으면
$f(f(x)) = a(ax - 6a - 2) - 6a - 2 = x$
$\therefore a^2x - 6a^2 - 8a - 2 = x$
즉, $a^2 = 1$, $-6a^2 - 8a - 2 = 0$ 이므로 $a = -1$
따라서 $f(x) = -x + 4$ 이므로
$f(-1) = -(-1) + 4 = 5$