

1. 다음 중 다항함수인 것을 고르면?

① $y = x^2 - 3x + 5$

② $y = \frac{1}{x^2}$

③ $y^2 = x$

④ $\frac{1}{y} = x$

⑤ $xy = 2$

해설

① $y = x^2 - 3x + 5$ 는 x 에 대한 다항식이므로 다항함수이다.

② $y = \frac{1}{x^2}$ 은 x 에 대한 다항식이 아니므로 다항함수가 아니다.

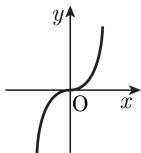
③ $y^2 = x$ 는 $y = \pm \sqrt{x}$ 와 같이 나타내어지고 이 것은 x 에 대한 다항식이 아니므로 다항함수가 아니다.

④ $\frac{1}{y} = x$ 는 $y = \frac{1}{x}$ 과 같이 나타내어지고 이것은 x 에 대한 다항식이 아니므로 다항함수가 아니다.

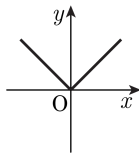
⑤ $xy = 2$ 는 $y = \frac{2}{x}$ 과 같이 나타내어지고 이것은 x 에 대한 다항식이 아니다.

2. 다음 중 함수의 그래프가 아닌 것은?

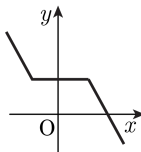
①



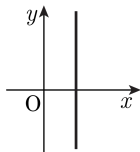
②



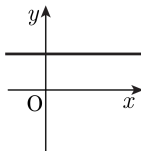
③



④



⑤



해설

함수가 되기 위한 2가지 조건

(i) 정의역에 있는 모든 원소가 빠짐없이 공역에 있는 원소에 대응되어야 한다.

(ii) 정의역에 있는 각각의 원소가 공역의 오직 하나의 원소에 대응되어야 한다.

④ : x 의 한 값 x_1 에 y 의 값이 무수히 많이 대응되고 있으므로 함수가 될 수 없다.

3. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 함수 $f : X \rightarrow Y$, $f(x) = |x - 2|$ 으로 주어질 때, 다음 중 $\{f(x) | x \in X\}$ 의 원소가 아닌 것은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

정의역을 X 로 하는 $f(x)$ 의 치역은 $\{0, 1, 2, 3\}$

4. 삼차함수 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ 에 대하여 $g(x) = (x+1)f(x) - 24x$ 로 정의 한다.

$g(0) = g(1) = g(2) = g(3) = 0$ 일 때, $f(4)$ 의 값은 ?

① 20

② 22

③ 24

④ 26

⑤ 28

해설

$g(0) = g(1) = g(2) = g(3) = 0$ 이므로

$g(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$ 이 된다.

즉, $(x+1)f(x) - 24x = x(x-1)(x-2)(x-3)$

이 식에 $x = 4$ 를 대입하면

$$5f(4) - 24 \cdot 4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\therefore f(4) = 24$$

5. 공집합이 아닌 두 집합 X, Y 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 $f(x) = x^2 - x - 3$, $g(x) = x + 5$ 에 대하여 $f = g$ 일 때, 정의역 X 가 될 수 있는 집합의 개수는 a 개이다. a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$f(x) = g(x)$ 이므로 집합 X 는 방정식 $f(x) = g(x)$ 를 만족하는 x 의 값을 원소로 갖는 집합이다.

$$x^2 - x - 3 = x + 5 \text{에서 } x^2 - 2x - 8 = 0, (x - 4)(x + 2) = 0$$

$$\therefore x = 4 \text{ 또는 } x = -2$$

즉, 집합 $\{-2, 4\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이 정의역 X 가 될 수 있으므로 집합 X 의 개수는 $2^2 - 1 = 3(\text{개})$ 이다.

$$\therefore a = 3$$

6. 다항식 $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $g(g(x)) = x$ 이고 $g(1) = 0$ 일 때, $g(-1)$ 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$g(x)$ 가 n 차 다항식이라 하면

$g(g(x))$ 의 차수는 n^2 이다.

모든 실수 x 에 대하여 $g(g(x)) = x$ 이므로

양변의 차수를 비교하면 $n^2 = 1$

$\therefore n = 1$ ($\because n$ 은 자연수)

즉, $g(x)$ 는 일차다항식이므로

$g(x) = ax + b$ 라 하면 $g(1) = 0$ 이므로

$a + b = 0$, 즉 $b = -a$

$\therefore g(x) = ax + b = ax - a$

$g(g(x)) = g(ax - a) = a(ax - a) - a$

$= a^2x - a^2 - a = x$

이 식은 x 에 대한 항등식이므로

$a^2 = 1$, $-a^2 - a = 0$

$\therefore a = -1$

즉, $g(x) = -x + 1$ 이므로 $g(-1) = 2$

7. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 세 함수 f, g, h 에 대하여 $(h \circ g)(x) = 3x + 4$, $f(x) = x^2$ 일 때, $(h \circ (g \circ f))(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(2) &= ((h \circ g) \circ f)(2) \\ &= (h \circ g)(f(2)) \\ &= (h \circ g)(4) \\ &= 3 \times 4 + 4 = 16\end{aligned}$$

8. 함수 $f(x) = 2x + 6$, $g(x) = ax - 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 일 때, a 의 값은?

① $\frac{1}{6}$

② $\frac{5}{6}$

③ 1

④ 2

⑤ 6

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= 2g(x) + 6 = 2(ax - 1) + 6 \\ &= 2ax + 4 \cdots \textcircled{\text{㉠}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= af(x) - 1 = a(2x + 6) - 1 \\ &= 2ax + 6a - 1 \cdots \textcircled{\text{㉡}}\end{aligned}$$

$$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}} \text{에서 } 2ax + 4 = 2ax + 6a - 1$$

$$4 = 6a - 1$$

$$\therefore a = \frac{5}{6}$$

9. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f 가 $f\left(\frac{3x+1}{2}\right) = 6x-5$ 일 때,
 $f(2x+1)$ 을 구하면?

① $x-1$

② $2x-2$

③ $4x-2$

④ $6x-3$

⑤ $8x-3$

해설

$$\frac{3x+1}{2} = t \text{ 라 하면 } 2t = 3x+1$$

$$\therefore x = \frac{2t-1}{3}$$

$$f\left(\frac{3x+1}{2}\right) = 6x-5 \text{ 에서}$$

$$f(t) = 6 \cdot \frac{2t-1}{3} - 5 = 4t-7$$

$$\therefore f(2x+1) = 4(2x+1) - 7 = 8x-3$$

10. 두 함수 $f(x) = 4x - 3$, $g(x) = 2x + 1$ 에 대하여 $h \circ g = f$ 를 만족하는 함수 $h(x)$ 를 구하면?

① $h(x) = x + 4$

② $h(x) = 2x - 5$

③ $h(x) = 3x + 2$

④ $h(x) = 3x + 5$

⑤ $h(x) = 5x + 3$

해설

$h(x) = ax + b$ 라고 놓으면

$h \circ g = f$ 에서 $a(2x + 1) + b = 4x - 3$

$\therefore 2a = 4, a + b = -3$

이것을 풀면 $a = 2, b = -5$

따라서 $h(x) = 2x - 5$

11. 함수 $f(x) = \frac{-3x+1}{x+3}$ 에 대하여 $f^1=f$, $f^{n+1} = f \circ f^n (n = 1, 2, 3, \dots)$ 이라 할 때, $f^{2006}(-2) + f^{2007}(-2)$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$$f(-2) = \frac{6+1}{-2+3} = 7$$

$$f^2(-2) = f(f(-2)) = f(7) = -2$$

$$f^3(-2) = f(f^2(-2)) = f(-2) = 7$$

$$f^4(-2) = f(f^3(-2)) = f(7) = -2$$

$\vdots$

$$f^{2006}(-2) = -2$$

$$f^{2007}(-2) = 7$$

$$\therefore f^{2006}(-2) + f^{2007}(-2) = -2 + 7 = 5$$

12. 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, $(f \circ g)(p)$ 의 값은 얼마인가? (단, 점선은 x 축 또는 y 축에 평행하다.)

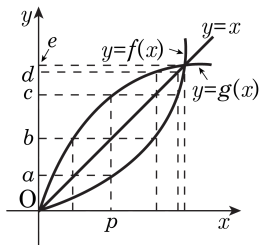
① a

② b

③ c

④ d

⑤ e



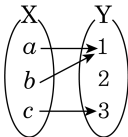
해설

주어진 그림에서 $g(p) = c, f(c) = b$

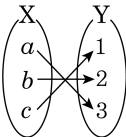
$\therefore (f \circ g)(p) = f(g(p)) = f(c) = b$

13. 다음 함수 중에서 역함수가 존재하는 것을 고르면?

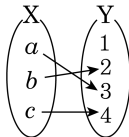
①



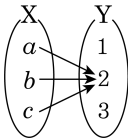
②



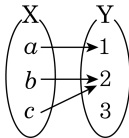
③



④



⑤



해설

주어진 함수 중 일대일대응인 것은 ②번이다.

14. 함수 $y = x - 2$ 의 역함수를 구하면 무엇인가?

① $y = x - 2$

② $y = x + 2$

③ $y = -x - 2$

④ $y = -x + 2$

⑤ $y = \frac{1}{2}x - 1$

해설

$y = x - 2$ 를 x 에 관해서 풀면

$$x = y + 2$$

x 와 y 를 바꾸면 $y = x + 2$

15. 함수 $f(x) = 2x - 5$ 의 역함수를 $y = f^{-1}(x)$ 라 할 때, $f^{-1}(-3)$ 의 값은 얼마인가?

① -3

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 3

해설

$f(x) = y = 2x - 5$ 에서 x 와 y 를 바꾸면 $x = 2y - 5$
 $x = 2y - 5$ 를 y 에 대하여 정리하면

$$y = \frac{1}{2}(x + 5)$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 5)$$

$$\therefore f^{-1}(-3) = 1$$

|다른풀이| $f^{-1}(-3) = a$ 로 놓으면

$$f(a) = -3 \text{ 에서 } f(a) = 2a - 5 = -3, 2a = 2$$

$$\therefore a = f^{-1}(-3) = 1$$

16. $f(x) = \begin{cases} x(x \leq 0) \\ x^2(x > 0) \end{cases}$, $g(x) = f(x+4)$ 로 정의한다. $h(x) = g^{-1}(x)$

라 할 때, $h(0)$ 의 값은 ?

① -4

② -2

③ 0

④ 2

⑤ 4

해설

$$h(0) = g^{-1}(0) = k$$

$$g(k) = f(k+4) = 0$$

$$\therefore k+4 = 0$$

$$\therefore k = -4$$

$$\therefore h(0) = -4$$

17. 유한집합 X 에서 유한집합 Y 로의 함수 f 의 역함수 f^{-1} 가 존재한다고 한다. 다음 설명 중 옳지 않은 것을 고르면?

① $n(X) = n(Y)$ 이다.

② $x_1 \neq x_2$ 이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 이다.

③ $y = f(x)$ 와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

④ $f(a) = b$ 이면 $f^{-1}(b) = a$ 이다.

⑤ $y = f(x)$ 의 정의역은 $y = f^{-1}(x)$ 의 정의역과 일치한다.

해설

⑤ $(f \text{ 의 정의역}) = (f^{-1} \text{ 의 치역})$

$(f^{-1} \text{ 의 정의역}) = (f \text{ 의 치역})$

18. $f(x) = x^2 - 4x + 1$ ($x \geq 2$), $g(x) = 2x - 6$ 에 대하여 $(f \circ (g \circ f)^{-1})(4)$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$g(5) = 4 \text{ 이므로 } g^{-1}(4) = 5$$

$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ f)^{-1})(4) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1})(4) \\ &= g^{-1}(4) \\ &= 5\end{aligned}$$

19. $f(x) = -x, g(x) = 1 - \frac{2}{x}$ 에 대하여 함수 $h(x)$ 를 $h(x) = (g^{-1} \circ f \circ g)(x)$ 로 정의 할 때, $(h \circ h)(x)$ 는 무엇인가?

① x

② $x + 1$

③ $x + 2$

④ $x + 3$

⑤ $x + 4$

해설

$$h = g^{-1} \circ f \circ g \text{ 에서}$$

$$\begin{aligned} h \circ h &= (g^{-1} \circ f \circ g) \circ (g^{-1} \circ f \circ g) \\ &= (g^{-1} \circ f \circ f \circ g) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (h \circ h)(x) &= (g^{-1} \circ f \circ f \circ g)(x) \\ &= (g^{-1} \circ (f \circ f))(g(x)) \\ &= g^{-1}((f \circ f)(g(x))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f \circ f)(x) &= f(f(x)) = -f(x) = -(-x) = x \text{ 이므로 } (h \circ h)(x) = \\ &= g^{-1}(g(x)) = x \end{aligned}$$

20. 함수 $f(x) = x^2 - 4x + 6 (x \geq 2)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 할 때, $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① -1

② $-\sqrt{2}$

③ 1

④ $\sqrt{2}$

⑤ 2

해설

함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이므로 두 함수의 그래프의 교점은 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = x$ 의 그래프의 교점과 같다.

$y = x^2 - 4x + 6$ 과 $y = x$ 를 연립하면

$$x^2 - 5x + 6 = 0, (x - 2)(x - 3) = 0$$

$$\therefore x = 2 \text{ 또는 } x = 3$$

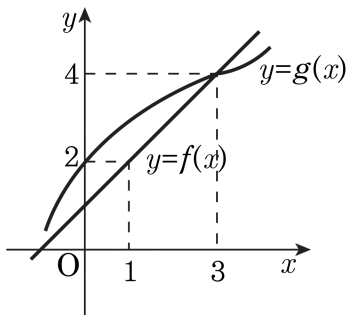
$$\therefore x = 2, y = 2 \text{ 또는 } x = 3, y = 3$$

즉, 두 교점은 점 $(2, 2)$, $(3, 3)$ 이다.

따라서, 구하는 두 교점 사이의 거리는

$$\sqrt{(3-2)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2}$$

21. 두 함수 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 가 각각 일대일대응이고 그 그래프가 다음 그림과 같을 때, $(g^{-1} \circ f)(1) + g(3)$ 의 값은 얼마인가?



① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 7

해설

주어진 식을 간단히 하면

$$\begin{aligned}(g^{-1} \circ f)(1) + g(3) &= g^{-1}(f(1)) + 4 \\ &= g^{-1}(2) + 4\end{aligned}$$

$g^{-1}(2) = k$ 로 놓으면 $g(k) = 2$

문제의 그림에서 $y = g(x)$ 의 그래프가

$(0, 2)$ 를 지나므로 $g(0) = 2$

이 때, $y = g(x)$ 는 일대일대응이므로 $k = 0$

$$\therefore g^{-1}(2) + 4 = 0 + 4 = 4$$

22. 점 $(6, -2)$ 를 지나는 일차함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프가 일치할 때, $f(-1)$ 의 값은?

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$f = f^{-1}$ 이므로 $(f \circ f)(x) = x$

$f(x) = a(x - 6) - 2 = ax - 6a - 2 (a \neq 0)$ 로 놓으면

$f(f(x)) = a(ax - 6a - 2) - 6a - 2 = x$

$\therefore a^2x - 6a^2 - 8a - 2 = x$

즉, $a^2 = 1$, $-6a^2 - 8a - 2 = 0$ 이므로 $a = -1$

따라서 $f(x) = -x + 4$ 이므로

$f(-1) = -(-1) + 4 = 5$