1. $-4 \le x \le a,\ 1 \le y \le 5$에서 $\frac{1}{2}x + 3y$ 의 최댓값이 16 일때, a는?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$-4 \le x \le a$에서 $-2 \le \frac{1}{2}x \le \frac{a}{2} \cdots\cdots$ ㉠

$1 \le y \le 5$ 이므로 $3 \le 3y \le 15 \cdots\cdots$ ㉡

㉠ + ㉡을 하면 $1 \le \frac{1}{2}x + 3y \le \frac{a}{2} + 15$

따라서 최댓값이 16 이므로 $a = 2$

2. 부등식 $|x-1|+|x-2|<3$ 을 풀면?

① $-1<x<4$ ② $-1<x<2$ ③ $0<x<1$

④ $0<x<2$ ⑤ $0<x<3$

해설

(i) $x<1$일 때

$-(x-1)-(x-2)<3,\ -2x<0\quad \therefore x>0$

그런데 $x<1$이므로 $0<x<1$

(ii) $1\le x<2$일 때

$(x-1)-(x-2)<3,\ 0\cdot x<2$

$\therefore$ 모든 x에 대해 성립

그런데 $1\le x<2$이므로 $1\le x<2$

(iii) $x\ge 2$일 때

$(x-1)+(x-2)<3,\ 2x<6\quad \therefore x<3$

그런데 $x\ge 2$이므로 $2\le x<3$

(i), (ii), (iii)에서 $0<x<3$

3. 이차부등식 $x^2 - 2x - 8 < 0$의 해가 $a < x < b$일 때, $b - a$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$x^2 - 2x - 8 < 0$ 에서 $(x-4)(x+2) < 0$

$\therefore -2 < x < 4$

$b - a = 6$

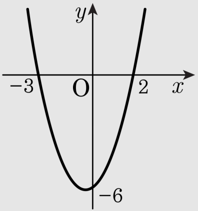
4. 이차함수의 그래프를 이용하여 이차부등식 $x^2 + x - 6 > 0$을 풀면?

① $x < -3$ 또는 $x > 2$ ② $x < -2$ 또는 $x > 3$

③ $x < -1$ 또는 $x > 4$ ④ $x < 0$ 또는 $x > 5$

⑤ $x < 1$ 또는 $x > 6$

해설



이차방정식 $x^2 + x - 6 = 0$ 에서 $(x+3)(x-2) = 0$

$\therefore x = -3$ 또는 $x = 2$

$f(x) = x^2 + x - 6$ 으로 놓으면 $y = f(x)$ 의 그래프는 오른쪽 그림과 같고

이차부등식 $f(x) > 0$ 의 해는 $x < -3$ 또는 $x > 2$

5. 다음 이차연립부등식을 만족하는 실수 x의 값의 범위는?

$$\begin{cases} x^2 - 4 < 0 \\ x^2 - 5x + 4 \quad \geq 0 \end{cases}$$

① $x \leq -3$　　② $-2 < x \leq 1$　　③ $-1 \leq x < 2$

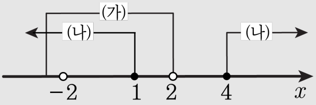
④ $0 < x \leq 2$　　⑤ $x > 3$

해설

$$\begin{cases} x^2 - 4 < 0, (x+2)(x-2) < 0 \\ \therefore -2 < x < 2 \cdots \text{(가)} \\ x^2 - 5x + 4 \geq 0, \\ x \leq 1 \text{ 또는 } x \geq \cdots \text{(나)} \end{cases}$$

따라서 (가), (나)의 공통 범위를 구하면

$-2 < x \leq 1$이다.



6. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것을 고르면?

① $A > B > 0,\ C > D > 0$이면 $AC > BD$이다.

② $A > B,\ C > D$이면 $A + C > B + D$이다.

③ $A > B > 0$이면 $A^2 > B^2$이다.

④ $A > B$이면 $\frac{1}{A} < \frac{1}{B}$이다.

⑤ $A > 0 > B$이면 $\frac{1}{A} > \frac{1}{B}$이다.

해설

④ 만약 $B < 0 < A$인 경우라면 $\frac{1}{A} > \frac{1}{B}$가 되어 주어진 문장은 틀리다.

7. 다음 부등식의 해가 없을 때, 상수 m의 값의 합은?

$$m^2x-1>m(x-1)$$

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$m^2x-1>m(x-1)$에서

$m^{2x}-1>mx-m$

$\therefore (m^2-m)x>1-m \cdots$ ㉠

㉠의 해가 없어야 하므로

$m^2-m=0,\ 1-m\ge 0$

$m^2-m=0$에서 $m(m-1)-0$

$\therefore m=0$ 또는 $1 \cdots$ ㉡

$1-m\ge 0$에서 $m\le 1 \cdots$ ㉢

따라서 ㉡, ㉢에서 $m=0$ 또는 $m=1$

8. x에 대한 부등식 $(a+b)x+a-2b>0$의 해가 $x<1$일 때, x에 대한 부등식 $(b-3a)x+a+2b>0$의 해는?

① $x<-10$ ② $x<-5$ ③ $x>-5$

④ $x<5$ ⑤ $x>5$

해설

$(a+b)x+a-2b>0$에서 $(a+b)x>-a+2b\cdots$㉠

㉠의 해가 $x<1$이려면 $a+b<0\cdots$㉡

㉠이 양변을 $a+b$로 나누면 $x<\dfrac{-a+2b}{a+b}$이므로

$\dfrac{-a+2b}{a+b}=1,\quad -a+2b=a+b$

$\therefore 2a=b\cdots$㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $a+2a=3a<0 \therefore a<0$

㉢을 부등식 $(b-3a)x+a+2b>0$에 대입하면

$(2a-3a)x+a+4a>0,\quad -ax>-5a \quad \therefore x>5$

9. 부등식 $|2x-a|>7$의 해가 $x<-1$ 또는 $x>b$일 때, 상수 a, b의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$|2x-a|>7$에서

$2x-a<-7$ 또는 $2x-a>7$

$\therefore x<\dfrac{a-7}{2}$ 또는 $x>\dfrac{a+7}{2}$

그런데 주어진 부등식의 해가

$x<-1$ 또는 $x>b$이므로

$\dfrac{a-7}{2}=-1$, $\dfrac{a+7}{2}=b$

$\therefore a=5$, $b=6$

$\therefore a+b=11$

10. 부등식 $x^2 - kx + 2 > 0$이 항상 성립하도록 하는 상수 k의 범위를 구하면 $a < k < b$이다. 이 때, ab의 값은?

① -10 ② -9 ③ -8 ④ -7 ⑤ -6

해설

$x^2 - kx + 2 > 0$이 항상 성립하려면
판별식이 실근을 갖지 않을 때이므로
$D = k^2 - 4 \cdot 2 < 0$
$k^2 - 8 < 0$, $\left(k - 2\sqrt{2}\right)\left(k + 2\sqrt{2}\right) < 0$
$\therefore -2\sqrt{2} < k < 2\sqrt{2}$
따라서 $a = -2\sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{2}$이므로
$ab = -2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} = -8$

11. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$의 해가 $-2<x<1$일 때 부등식 $cx^2-bx-a>0$을 만족하는 한 자리의 자연수 x의 개수는?

① 1개　② 2개　③ 4개　④ 6개　⑤ 9개

해설

$ax^2+bx+c>0$ 의 해가 $-2<x<1$ 이므로 $a<0$
해가 $-2<x<1$ 이고 이차항의 계수가 1인 부등식은 $(x+2)(x-1)<0$,
즉 $x^2+x-2<0$ 양변에 a 를 곱하면
$ax^2+ax-2a>0$ 이 부등식이
$ax^2+bx+c>0$ 과 같으므로
$b=a, c=-2a\cdots$㈎
㈎를 $cx^2-bx-a>0$ 에 대입하면
$-2ax^2-ax-a>0$, $2x^2+x+1>0(\because -a>0)$
이 때 방정식 $2x^2+x+1=0$ 의 판별식
$D=1^2-4\cdot2=-7<0$ 이므로
$2x^2+x+1>0$ 은
모든 실수 x 에 대하여 성립한다.
따라서 주어진 부등식을 만족하는
한자리의 자연수는 $1, 2, 3, \cdots, 9$ 의 9개이다.

12. 부등식 $|x-2|<k$를 만족하는 모든 x의 값이 부등식 $|x^2-8| \le 8$을 만족할 때, 실수 k의 최댓값은? (단, $k>0$)

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

부등식 $|x^2-8| \le 8$을 풀면

$-8 \le x^2-8 \le 8$

$0 \le x^2 \le 16$

$\therefore -4 \le x \le 4$

$k>0$이므로 부등식 $|x-2|<k$ 을 풀면

$-k < x-2 < k$

$-k+2 < x < k+2$

이때, 이 부등식의 모든 해가 $|x^2-8| \le 8$을 만족하려면

$-k+2 \ge -4,\ k+2 \le 4$이어야 하므로

$k \le 6,\ k \le 2$

$\therefore 0 < k \le 2$

따라서 실수 k의 최댓값은 2이다.

13. 다음 부등식을 풀어라.

$$|x-1| > |x-2|$$

▶ **답 :**

▷ **정답 :** $x > \frac{3}{2}$

해설

i) $x < 1$일 때,

$-(x-1) > -(x-2)$에서 $1 > 2$이므로 모순

ii) $1 \le x < 2$일 때,

$(x-1) > -(x-2)$에서

$2x > 3,\ x > \frac{3}{2}$

조건에서 $1 \le x < 2$이므로 $\frac{3}{2} < x < 2 \cdots$ ㉠

iii) $x \ge 2$일 때, $(x-1) > (x-2)$에서 $1 < 2$이므로 성립

$\therefore\ x \ge 2 \ \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $x > \frac{3}{2}$

14. 부등식 $ax^2+(a+1)x+a>0$을 만족하는 실수 x가 존재하기 위한 상수 a의 값의 범위는?

① $a>-1$ ② $a>-\frac{1}{2}$ ③ $a>-\frac{1}{3}$
④ $a>-\frac{1}{4}$ ⑤ $a>-\frac{1}{5}$

해설

$ax^2+(a+1)x+a>0$에서

i) $a=0$이면 $x>0$
$\therefore$ 실수해가 존재한다.
ii) $a>0$ 이면 $y=ax^2+(a+1)x+a$의 그래프가 아래로 볼록한 모양이므로
$ax^2+(a+1)x+a>0$을 만족시키는 x값이 반드시 존재한다.
iii) $a<0$이면 $D=(a+1)^2-4a^2>0$
$3a^2-2a-1<0$, $(3a+1)(a-1)<0$
$\therefore\ -\frac{1}{3}<a<1$, $a<0$ 이므로 $-\frac{1}{3}<a<0$

i), ii), iii)에서 $a>-\frac{1}{3}$

15. 부등식 $\left(x+\frac{1}{x}\right)(x^2-|x|-2) \le 0$ 을 풀면?

① $0 < x \le 1$ 또는 $x \le -2$

② $0 < x \le 1$ 또는 $x \le -1$

③ $0 < x \le 2$ 또는 $x \le -1$

④ $0 < x \le 2$ 또는 $x \le -2$

⑤ $0 < x \le 2$ 또는 $x \le 0$

해설

① $x > 0$이면 $|x| = x,\ x+\frac{1}{x} > 0$이므로

$x^2 - x - 2 \le 0 \ \rightarrow \ (x-2)(x+1) \le 0$

$\therefore\ -1 \le x \le 2$

$\therefore\ 0 < x \le 2\ (\because\ x > 0)$

② $x < 0$이면 $|x| = -x,\ x+\frac{1}{x} < 0$이므로

$x^2 + x - 2 \ge 0 \ \rightarrow \ (x-1)(x+2) \ge 0$

$\therefore\ x \le -2,\ x \ge 1$

$\therefore\ x \le -2\ (\because\ x < 0)$

①, ②에서 $0 < x \le 2,\ x \le -2$

16. 실수 x에 대하여 $[x]$는 x를 넘지않는 최대 정수를 나타낸다고 한다. 부등식 $2[x]^2-[x]-6<0$를 만족하는 x의 범위를 바르게 구한 것은?

① $-1 \le x < 2$ ② $x \le -1$ ③ $x \ge 1$

④ $x \le 1$ ⑤ $x \le -1,\ x \ge 2$

해설

$2[x]^2-[x]-6<0$에서 좌변을 인수분해하면

$(2[x]+3)([x]-2)<0,\ -\dfrac{3}{2}<[x]<2$

이 때 $[x]$는 정수이므로 $[x]=-1,\ 0,\ 1$

$[x]=-1,\ 0,\ 1$이면 $-1 \le x < 2$

$\therefore\ -1 \le x < 2$

17. 이차부등식 $(x+1)^2 \le k(x^2-x+1)$이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립할 때, 실수 k의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$(x+1)^2 \le k(x^2-x+1)$

$(k-1)x^2-(k+2)x+k-1 \ge 0$

모든 x에 대해 성립하려면,

$k-1>0$, 판별식이 0보다 작거나 같다

$D=(k+2)^2-4(k-1)(k-1) \le 0$에서

$\{(k+2)-2(k-1)\}\{(k+2)+2(k-1)\}$

$=(-k+4)k \le 0$

$\therefore\ k(k-4) \ge 0, \quad k \le 0$ 또는 $k \ge 4$

$\therefore\ \ k \ge 4(\because k>1) \quad \therefore$ 최솟값 : 4

18. 임의의 실수 x에 대하여 $x^2+2ax+2a+3 \geq 0$이 성립하기 위한 상수 a의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2+2ax+2a+3 \geq 0$이 항상 성립할 조건은

$D/4 = a^2-2a-3 = (a+1)(a-3) \leq 0$

$\therefore -1 \leq a \leq 3$

a의 최솟값은 -1

19. 모든 실수 x에 대하여 $x^2-2mx-m\geq 0$을 만족하는 실수 m의 범위는 $a\leq m\leq b$이다. $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=-1$

해설

$x^2-2mx-m\geq 0$이

항상 성립하려면 판별시 $D\leq 0$

$$\frac{D}{4}=m^2+m\leq 0$$

$m(m+1)\leq 0$, $-1\leq m\leq 0$

$\therefore\ a+b=(-1)+0=-1$

20. 모든 실수 x 에 대하여 다항식 $(m+1)x^2-2(m-1)x+3$ 의 값이 항상 2보다 크도록 하는 상수 m 의 범위가 $a<m<b$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(m+1)x^2-2(m-1)x+3>2$

$(m+1)x^2-2(m-1)x+1>0$ 이므로

$m \neq -1,\ m>-1$ 이고, $D<0$ 이다.

$\dfrac{D}{4}=m^2-3m<0 \qquad \therefore\ 0<m<3$

$\therefore a=0,\ b=3$

$\therefore a+b=3$

21. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 2일 때, 방정식 $f(2x-3)=0$의 두 근의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x)=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 $\alpha+\beta=2$

$f(2x-3)=0$에서 $2x-3=\alpha,\ 2x-3=\beta$

$\therefore\ x=\dfrac{\alpha+3}{2},\ \dfrac{\beta+3}{2}$

$\therefore$두 근의 합은 $\dfrac{(\alpha+\beta)+6}{2}=4$

22. 이차방정식 $(2+k)x^2+4x-(1+k)=0$이 실근을 갖기 위한 실수 k 값의 범위는?

① $k \geq 1$

② $k \leq -2$

③ k는 모든 실수

④ k는 없다.

⑤ $k \neq -2$인 모든 실수

해설

이차방정식이므로 $k \neq -2$

실근을 가지려면 판별식이 0보다 크거나 같아야 하므로

$D' = 2^2 + (k+2)(k+1) \geq 0$

$k^2 + 3k + 6 \geq 0$

$k^2 + 3k + 6 = (k + \frac{3}{2})^2 + \frac{15}{4} \geq 0$이므로

모든 실수 k에 대해 성립.

$\therefore \ k \neq -2$인 모든 실수

23. 두 대의 승용차 A, B가 같은 거리를 가는데 A는 거리의 반은 시속 $v$km로 달리고, 나머지 거리는 시속 $u$km로 달린다고 한다, 또한 B는 소요된 시간의 반은 시속 $u$km로 달리고 나머지 소요된 시간은 $v$km로 달린다고 한다. 승용차 A, B의 평균 속력이 각각 $x$km/시, $y$km/시일 때, x와 y의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $x \le y$ ② $x \ge y$ ③ $x = y$ ④ $x < y$ ⑤ $x > y$

해설

승용차 A가 달린 거리를 s,

시간을 t라 하면 $t = \dfrac{s}{2u} + \dfrac{s}{2v}$

평균 속력은

$$\frac{s}{t} = \frac{s}{\dfrac{s}{2u} + \dfrac{s}{2v}} = \frac{s}{\dfrac{su + sv}{2uv}} = \frac{2uv}{u + v} = x$$

승용차 B의 평균 속력은 $\dfrac{1}{2}(u + v) = y$

$$y - x = \frac{1}{2}(u + v) - \frac{2uv}{u + v}$$

$$= \frac{(u + v)^2 - 4uv}{2(u + v)} \ge 0$$

따라서 $y - x \ge 0$이므로 $x \le y$이다.

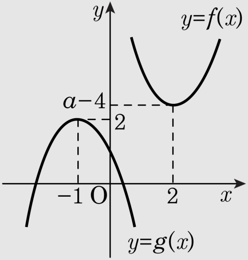
24. 이차함수 $f(x) = x^2 - 4x + a$ 와 $g(x) = -x^2 - 2x + 1$ 이 있다. 임의의 실수 x_1 , x_2 에 대하여 $f(x_1) > g(x_2)$ 일 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a > 6$ ② $a > 5$ ③ $a > 4$ ④ $a > 3$ ⑤ $a > 2$

해설

$f(x) = x^2 - 4x + a = (x-2)^2 + a - 4$ 에서

$f(x)$ 의 최솟값은 $a-4$,
$g(x) = -x^2 - 2x + 1$
$= -(x+1)^2 + 2$ 에서
$g(x)$ 의 최댓값은 2
한편, 모든 실수 x_1 , x_2 에 대하여
$f(x_1) > g(x_2)$ 이면 오른쪽 그림과 같이
$f(x)$ 의 최솟값이 $g(x)$ 의 최댓값보다
커야 하므로



$a - 4 > 2$ $\quad \therefore\ a > 6$

25. $0 < x < 1$ 인 모든 x 에 대하여 항상 $x^2 - 3 \le (a-1)x$ 가 성립할 때, 실수의 상수 a 의 범위를 구하면?

① $a = -1$ ② $a > -1$ ③ $a \ge -1$

④ $a < -1$ ⑤ $a \le -1$

해설

$f(x) = x^2 - (a-1)x - 3$ 이라 두어,
$0 < x < 1$ 에서 $f(x) \le 0$ 되도록 하자.
$f(0) \le 0$ 그리고 $f(1) \le 0$ 이면 된다.
그런데, $f(0) = -3$ 이므로
$f(1) = 1 - (a-1) - 3 \le 0$ 에서 $a \ge -1$