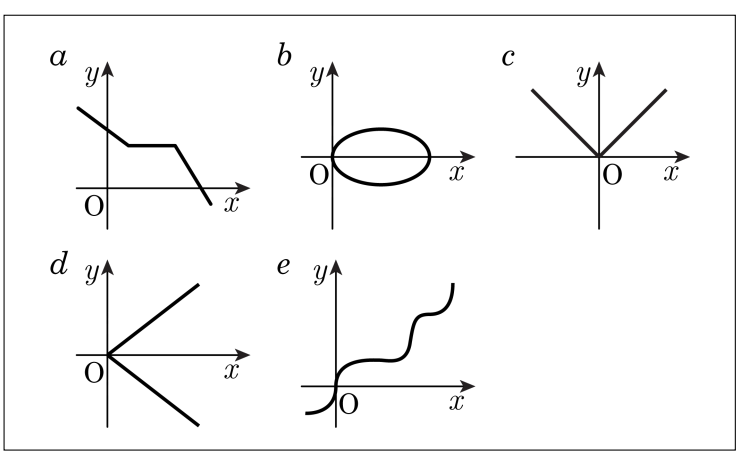
1. 다음 그래프 중 함수인 것은?



① a, b, c ② a, c, e ③ a, c, d ④ b, c, e ⑤ c, d, e

해설

[a] 함수 [b] 함수가 아니다. [c] 함수 [d] 함수가 아니다. [e] 함수
따라서 [a], [c], [e] 만이 함수이다.

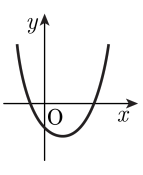
2. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$에 대하여 함수 $f : X \to Y$, $f(x) = |x - 2|$ 으로 주어질 때, 다음 중 $\{f(x) | x \in X\}$ 의 원소가 아닌 것은?

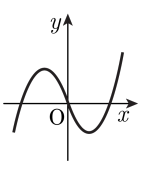
① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

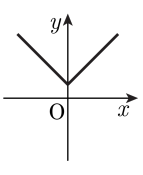
해설

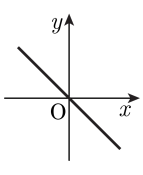
정의역을 X로 하는 $f(x)$의 치역은 $\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$

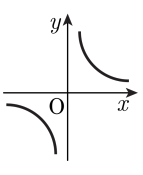
3. 다음 그래프 중에서 실수전체 집합에서 역함수가 존재하는 함수의 그래프는?

① 

② 

③ 

④ 

⑤ 

해설

역함수가 존재하려면 함수가 일대일 대응이어야 한다.
일대일 대응이란 변수 x, y가 서로 하나씩 대응되는 것으로 ④에 해당된다.
⑤ 번은 $x = 0$ 에 대응되는 y가 없다.

4. 함수 $y = -x - 1$의 역함수의 그래프에서 x절편을 a, y절편을 b라 할 때, ab의 값은 얼마인가?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$y = -x - 1$에서 $x = -y - 1$
여기서 x와 y를 바꾸면 역함수는 $y = -x - 1$
따라서 x절편 $a = -1$, y절편 $b = -1$이므로
$ab = 1$

5. 함수 $f(x) = | \, x-2 \, | + 1 \, |$ 에 대하여 $f(-1) - f(3)$ 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(-1) = | \, -1-2 \, | + 1 \, | = 4$
$f(3) = | \, 3-2 \, | + 1 \, | = 2$ 이므로
$\therefore \ f(-1) - f(3) = 2$

6. 함수 $y = -\frac{2}{x} - 3$ 의 점근선의 방정식은?

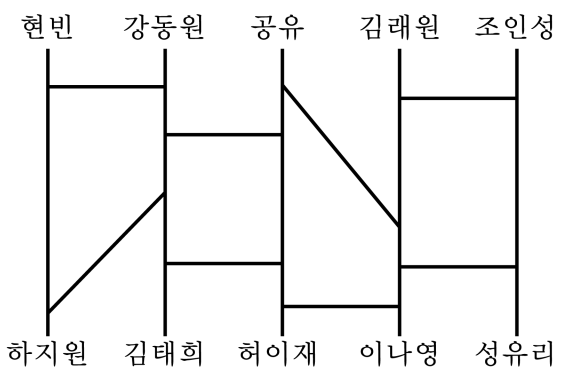
① $x = 0,\ y = 3$ ② $x = 0,\ y = -3$ ③ $x = 1,\ y = 3$

④ $x = -1,\ y = 3$ ⑤ $x = 1,\ y = -3$

해설

$y = -\frac{2}{x} - 3$ 는 $y = -\frac{2}{x}$ 의 그래프를 y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 그래프이므로 점근선의 방정식은 $x = 0,\ y = -3$ 이다.

7. 남녀 혼성 장기자랑에 참여한 H 남고 남학생 5명과 S 여고 여학생 5명이 파트너를 정하려고 한다. 남녀 한 명도 빠짐없이 팀을 이루기 위한 방법으로 사다리타기로 파트너를 정하기로 하였다. 현빈과 김태희가, 강동원과 이나영이, 공유와 성유리가, 김래원과 허이재가 짝을 이루었다면 남은 조인성의 파트너는 누구인가?



① 하지원 ② 성유리 ③ 이나영
④ 허이재 ⑤ 김태희

해설

일대일 대응이므로 조인성-하지원이 파트너가 된다.

8. 두 집합 $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2\}$에 대하여 X에서 Y로의 함수의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 8개

해설

1이 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
2가 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
3이 대응할 수 있는 원소는 1, 2의 2가지
따라서 X에서 Y로의 함수의 개수는
$2 \times 2 \times 2 = 8$(개)

9. 두 함수 f, g 가 일대일대응일 때, 다음 중 $g \circ (f \circ g)^{-1}$ 와 같은 것을 고르면?

① f　　② f^{-1}　　③ g

④ g^{-1}　　⑤ $g \circ f^{-1}$

해설

$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ 이므로

$$\begin{aligned} g \circ (f \circ g)^{-1} &= g \circ (g^{-1} \circ f^{-1}) \\ &= (g \circ g^{-1}) \circ f^{-1} \\ &= f^{-1} \end{aligned}$$

10. 함수 $f(x) = |4x + a| + b$ 는 $x = 3$ 일 때, 최솟값 -2 를 가진다. 이때, 상수 a, b 의 값에 대하여 $b - a$ 의 값을 구하여라.

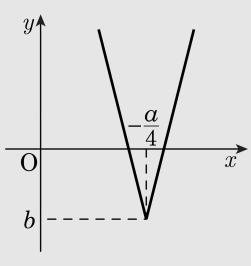
▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

$f(x) = |4x + a| + b = \left|4\left(x + \frac{a}{4}\right)\right| + b$ 의 그래프는

$y = |4x|$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{a}{4}$ 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한것이므로 다음 그림과 같다.



따라서 $x = -\frac{a}{4}$ 일 때

최솟값 b 를 가지므로 $-\frac{a}{4} = 3$, $b = -2$

따라서 $a = -12$, $b = -2$ 이므로

$\therefore b - a = 10$

11. 다음 식을 간단히 하면 $\frac{a}{x(x+b)}$ 이다. $a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 상수)

$$\frac{1}{x(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+6)}+\frac{1}{(x+6)(x+8)}+\frac{1}{(x+8)(x+10)}$$

▶ 답:

▷ 정답: 15

해설

$\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$ 임을 이용하여 부분분수로 변형하여 푼다.

(주어진 식)

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+6}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+8}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+8}-\frac{1}{x+10}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+10}\right)$$
$$=\frac{5}{x(x+10)}$$

$a=5, b=10$이므로 $a+b=15$

12. $x : y = 2 : 3$ 일 때, $\dfrac{3x^2 + 2xy}{x^2 + xy}$ 의 값을 구하여라.

① $\dfrac{12}{5}$ ② $\dfrac{5}{12}$ ③ $\dfrac{13}{5}$ ④ $\dfrac{5}{13}$ ⑤ 5

해설

$x : y = 2 : 3 \Rightarrow x = 2k, y = 3k$

$$\frac{3x^2 + 2xy}{x^2 + xy} = \frac{3(2k)^2 + 2(2k)(3k)}{4k^2 + (2k)(3k)}$$

$$= \frac{24k^2}{10k^2} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$$

13. $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}(\neq 0)$ 일 때, $\frac{3a-b-c}{3a+b+c}=-\frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$의 값을 구하여라.(단, p, q는 서로 소인 양의 정수)

▶ 답:

▷ 정답: 14

해설

$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=k(k\neq 0)$로 놓으면

$a=2k,\ b=3k,\ c=4k$

$\therefore \frac{3a-b-c}{3a+b+c}=\frac{6k-3k-4k}{6k+3k+4k}=\frac{-k}{13k}=-\frac{1}{13}$

$\therefore p=13, q=1 \quad p+q=14$

14. $-1 < x < 1$일 때, $\sqrt{x^2-2x+1} + \sqrt{x^2+2x+1}$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

(준식) $= \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x+1)^2}$

$= |x-1| + |x+1| = -(x-1) + (x+1) = 2$

15. 유리수 a, b가 등식 $(a+\sqrt{2})^2 = 6 + b\sqrt{2}$를 만족시킬 때, ab의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$a^2 + 2\sqrt{2}a + (\sqrt{2})^2 = 6 + b\sqrt{2}$

무리수의 상등에 의하여

유리수 부분 : $(a^2+2) = 6,\ a^2 = 4$

무리수 부분 : $2a\sqrt{2} = b\sqrt{2},\ 2a = b$

$\begin{cases} a = 2, b = 4,\ ab = 8 \\ a = -2, b = -4,\ ab = (-2)(-4) = 8 \end{cases}$

$\therefore ab = 8$

16. 함수 $y=\dfrac{2x-4}{x-3}$ 에 관한 설명 중 틀린 것을 고르면?

① 점근선 중 하나는 $x=3$ 이다.

② 점근선 중 하나는 $y=2$ 이다.

③ 함수 $y=\dfrac{2}{x}+2$ 의 그래프를 x 축 방향으로 3만큼 평행이동한 그래프다.

④ 이 그래프는 x축을 지나지 않는다.

⑤ 함수 $y=\dfrac{2}{x-3}$ 의 그래프를 y 축 방향으로 2 만큼 평행이동한 그래프다.

해설

$y=\dfrac{2x-4}{x-3}=\dfrac{2(x-3)+2}{x-3}=\dfrac{2}{x-3}+2$

그러므로 함수의 점근선은 $x=3,\ y=2$이고

$y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축 방향으로 3만큼,

y축 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이다.

따라서 설명 중 틀린 것은 ④이다.

17. 두 집합 $X = \{-1, 0, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2\}$에 대하여 두 함수 $f : X \to Y$, $f(x) = x^3 + 1$, $g : X \to Y$, $g(x) = ax + b$가 $f = g$일 때, ab의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ −1 ⑤ −2

해설

f와 g의 정의역이 같으므로
$f(-1) = g(-1)$, $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1)$이면 $f = g$가 된다
$f(-1) = 0 = g(-1) = -a + b \cdots$㉠
$f(0) = 1 = g(0) = b \cdots$㉡
$f(1) = 2 = g(1) = a + b \cdots$㉢
㉠, ㉡, ㉢에서
$a = 1$, $b = 1$
따라서 $ab = 1$

18. 임의의 양수 a, b 에 대하여 $f(a)+f(b)=f(ab)$ 인 함수 $f(x)$ 가 있다. $f(2)=\alpha$, $f(3)=\beta$ 이고, f 의 역함수를 g 라 할 때, $g(\alpha+\beta)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$f(a)+f(b)=f(ab)$ 에 $a=2$, $b=3$ 을 대입하면
$f(2)+f(3)=f(6)$
$\therefore\ f(6)=\alpha+\beta$
$\therefore\ f^{-1}(\alpha+\beta)=6$
$\therefore\ g(\alpha+\beta)=6$

19. 분수식 $\dfrac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\dfrac{y^2}{(y-x)(y-z)}+\dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)}$를 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$\frac{x^2(z-y)+y^2(z-x)+z^2(y-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} \cdots ①$$

①에서 분자를 x에 관하여 정리하면

$$\begin{aligned}
&x^2(z-y)+y^2(z-x)+z^2(y-x)\\
&=(z-y)x^2-(z^2-y^2)x+yz^2-y^2z\\
&=(z-y)x^2-(z+y)(z-y)x+zy(z-y)\\
&=(z-y)\{x^2-(z+y)x+zy\}\\
&=(z-y)(x-z)(x-y)=(x-y)(y-z)(z-x)
\end{aligned}$$

$\therefore$ (준식) $=\dfrac{(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}=1$

20. 분수식 $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}}}$ 을 간단히 하면?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{2}-1$ ③ $\sqrt{2}+1$

④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 1

해설

$$\frac{1}{\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}-1}}=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)-1}=-1$$

$$\therefore (\text{준 식})=\frac{1}{\sqrt{2}-(-1)}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$=\sqrt{2}-1$$

21. 함수 $y=\frac{3}{x}$을 적당히 이동하였을 때 겹치지 않는 것은?

① $y=\frac{3}{x}+2$　② $y=\frac{3}{x-2}$　③ $y=\frac{-4x+11}{x-2}$

④ $y=\frac{x+3}{x-1}$　⑤ $y=\frac{2x-1}{x-2}$

해설

① $y=\frac{3}{x}+2$의 그래프는 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를
y축의 방향으로 2만큼 평행이동 시킨 것이다.

② $y=\frac{3}{x-2}$의 그래프는$y=\frac{3}{x}$의 그래프를
x축의 방향으로 2만큼 평행이동 시킨 것이다.

③ $y=\frac{-4x+11}{x-2}=\frac{-4(x-2)+3}{x-2}=\frac{3}{x-2}-4$
따라서 이 함수는 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를
x축의 방향으로 2만큼 y축의 방향으로
-4만큼 평행이동한 것이다.

④ $y=\frac{x+3}{x-1}=\frac{(x-1)+4}{x-1}=\frac{4}{x-1}+1$는
$y=\frac{3}{x}$의 그래프와 겹쳐지지 않는다.

⑤ $y=\frac{2(x-2)+3}{x-2}=\frac{3}{x-2}+2$는
$y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼
y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

22. 역함수가 존재하는 분수함수 f 에 대하여 $f^{-1}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)=2x+a$ 이고 $f(1)=2$ 일 때, $f(3)$ 의 값을 구하면? (단, a 는 상수)

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$f^{-1}\left(\frac{x+1}{2x-1}\right)=2x+a$

$\Leftrightarrow f(2x+a)=\frac{x+1}{2x-1}$

$2x+a=t$ 로 놓으면

$x=\frac{t-a}{2}$

$\therefore\ f(t)=\frac{\frac{t-a}{2}+1}{2\cdot\frac{t-a}{2}-1}$

$=\frac{t-a+2}{2t-2a-2}\cdots$ ⅰ)

이때, $f(1)=2$ 이므로

$a=-1$

이 값을 ⅰ)에 대입하면 $f(t)=\frac{t+3}{2t}$

$\therefore\ f(3)=1$

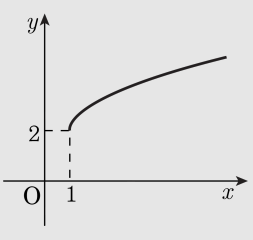
23. 무리함수 $y = \sqrt{ax+b} + c (a > 0)$ 의 정의역이 $\{ x \mid x \geq 1 \}$이고, 치역이 $\{ y \mid y \geq 2 \}$일 때, $\dfrac{2a^2 + c^2 - 2b}{2a}$ 의 최솟값을 구하면?

① $-\sqrt{2}$ ② 1 ③ $2\sqrt{2}$

④ $2\sqrt{2}+1$ ⑤ $2\sqrt{2}+2$

해설

정의역과 치역의 조건에 의하여 주어진 무리함수의 그래프는 다음과 같다. 즉 $y = \sqrt{a(x-1)} + 2$의 형태임을 알 수 있다.



$y = \sqrt{ax+b} + c$와 비교해보면 $b = -a, c = 2$이다.

$\therefore \dfrac{2a^2 + c^2 - 2b}{2a} = \dfrac{2a^2 + 4 + 2a}{2a} = a + \dfrac{2}{a} + 1$

$a > 0$이므로 $a + \dfrac{2}{a} \geq 2\sqrt{2}$

따라서 $a + \dfrac{2}{a} + 1 \geq 2\sqrt{2} + 1$이므로

최솟값은 $2\sqrt{2} + 1$ 이다.

24. 무리함수 $y=\sqrt{2x+3}$ 의 그래프가 직선 $y=x+k$ 와 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 실수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $\frac{3}{2}<k<2$ ② $\frac{3}{2}\le k<2$ ③ $\frac{3}{2}\le k\le 2$
④ $\frac{3}{2}<k\le 2$ ⑤ $1\le k<2$

해설

(i) 두 그래프가 접할 때, $\sqrt{2x+3}=x+k$ 의 양변을 제곱하여 정리하면
$x^2+2(k-1)x+k^2-3=0$
이것이 중근을 가지므로
$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-3)=-2k+4=0$
$\therefore\ k=2$

(ii) 직선 $y=x+k$가 점 $\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$을 지날때

$0=-\frac{3}{2}+k$
$\therefore\ k=\frac{3}{2}$

(i), (ii)와 위의 그림으로부터 두 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 k 값의 범위는
$\frac{3}{2}\le k<2$

25. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x) = ax + |x-2| + 3$ 이 일대일 대응이 되도록 하는 상수 a 의 값의 범위는?

① $a < -2$ 또는$a > 0$　② $-1 \le a \le 1$

③ $-2 < a < 2$　④ $a < -1$ 또는 $a > 1$

⑤ $a \ge 1$

해설

(i) $x \ge 2$ 일 때$f(x) = ax + x - 2 + 3 = (a+1)x + 1$
(ii) $x < 2$ 일 때$f(x) = ax - (x-2) + 3 = (a-1)x + 5$
함수 $f(x)$ 가 일대일 대응이 되려면 항상 증가하거나 감소해야 하므로 (i), (ii) 에서의 두 직선의 기울기의 부호가 같아야 한다.
따라서, $(a+1)(a-1) > 0$ 이므로
$a < -1$ 또는 $a > 1$