1. x 에 대한 다항식 $3x^3y+5y-xz+9xy-4$ 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ 내림차순으로 정리하면
$3yx^3+(9y-z)x+5y-4$이다.

㉡ 오름차순으로 정리하면
$5y-4+(9y-z)x+3yx^3$ 이다.

㉢ 주어진 다항식은 x 에 대한 3 차식이다.

㉣ x^3 의 계수는 3이다.

㉤ 상수항은 -4 이다.

① ㉠, ㉢
② ㉠, ㉡, ㉢
③ ㉠, ㉡
④ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤
⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣, ㉤

해설

㉣ x^3 의 계수는 $3y$ 이다.
㉤ 상수항은 $5y-4$ 이다.

2. 두 다항식 $A,\ B$에 대하여 연산 $A \ominus B$와 $A \otimes B$을 다음과 같이 정의하기로 한다.

$A \ominus B = A - 3B,\ A \otimes B = (A+B)B$

$P = 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3,\ Q = x^3 + x^2y + xy^2$이라 할 때,

$(P \ominus Q) \otimes Q$를 x, y에 관한 다항식으로 나타내면?

① $x^4y^2 + xy^5$　② $x^4y^2 - xy^5$　③ $x^3y^2 - xy^4$

④ $x^3y^2 + xy^4$　⑤ $2x^3y^2 - xy^4$

해설

정의에 따라 $(P \ominus Q) \otimes Q$를 변형하면

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (P - 3Q) \otimes Q \\ &= (P - 3Q + Q)Q \\ &= (P - 2Q)Q \quad \cdots \text{①}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P - 2Q \\ &= 2x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - y^3 - 2(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= xy^2 - y^3\end{aligned}$$

이므로 ①식은

$$\begin{aligned}(P \ominus Q) \otimes Q &= (xy^2 - y^3)(x^3 + x^2y + xy^2) \\ &= x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 - x^3y^3 \\ &\quad - x^2y^4 - xy^5 \\ &= x^4y^2 - xy^5\end{aligned}$$

3. 다항식 $f(x)$를 $2x^2+3x+2$로 나누었더니 몫이 $3x-4$이고, 나머지가 $2x+5$이었다. 이 때, $f(1)$의 값은?

① -1　② 0　③ 1　④ 3　⑤ 5

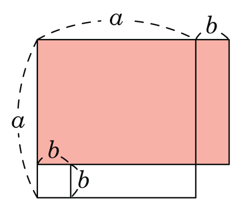
해설

$f(x) = (2x^2+3x+2)(3x-4)+(2x+5)$
$= 6x^3+9x^2+6x-8x^2-12x-8+2x+5$
$= 6x^3+x^2-4x-3$
$\therefore\ f(1) = 6+1-4-3 = 0$

해설

$f(x) = (2x^2+3x+2)(3x-4)+(2x+5)$
$f(1) = (2+3+2)(3-4)+(2+5) = -7+7 = 0$

4. 다음 그림에서 색칠한 부분이 나타내고 있는 곱셈공식은 무엇인가?



① $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

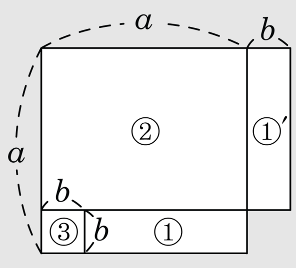
② $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

③ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

④ $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

⑤ $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

해설



$(a+b)(a-b) = ①' + ②$
$①' = ①$이므로
$(a+b)(a-b) = ① + ② = a^2 - b^2$
$\therefore\ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

5. 다음 중 다항식의 전개가 <u>잘못</u>된 것은?

① $(x+1)\left(x^2-x+1\right)=x^3+1$

② $(a+2b-3c)^2=a^2+4b^2+9c^2+4ab-12bc-6ac$

③ $(x+2)\left(x^2-2x+4\right)=x^3+8$

④ $\left(x^2-xy+y^2\right)\left(x^2+xy+y^2\right)=x^4-x^2y^2+y^4$

⑤ $(x-1)^2(x+1)^2=x^4-2x^2+1$

해설

④ $\left(x^2-xy+y^2\right)\left(x^2+xy+y^2\right)$
$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2$
$=x^4+x^2y^2+y^4$

6. $a^2+b^2+c^2=9$, $ab+bc+ca=9$, $a+b+c$의 값은?

① $-3\sqrt{2}$ ② $-2\sqrt{3}$ ③ $\pm 3\sqrt{3}$
④ $\pm 3\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{6}$

해설

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$
$= 9+18=27$
$\therefore\ a+b+c=\pm 3\sqrt{3}$

7. 두 다항식 $A,\ B$ 에 대하여 $A+B=-x^3-2x^2+4x+5$, $2A-B=4x^3-x^2-x+1$ 일 때, 두 다항식 A, B 를 구하면?

① $A=x^3+x^2+x+2,\ B=-2x^3-3x^2+3x+3$

② $A=x^3-x^2+x+2,\ B=-2x^3-x^2+3x+3$

③ $A=x^3-x^2+x-2,\ B=-2x^3-x^2+3x+7$

④ $A=x^3-x^2-x+2,\ B=-2x^3-x^2+5x+3$

⑤ $A=3x^3-3x^2+3x+6,\ B=-4x^3+x^2+x-1$

해설

$A+B=-x^3-2x^2+4x+5\cdots$ ㉠

$2A-B=4x^3-x^2-x+1\cdots$ ㉡

(㉠ + ㉡) $\div 3$: $A=x^3-x^2+x+2$

(2㉠ − ㉡) $\div 3$: $B=-2x^3-x^2+3x+3$

8. 두 다항식 A, B에 대하여 연산 $\triangle$, $\blacktriangledown$를 $A \triangle B = 2A + B$, $\mathrm{A} \blacktriangledown B = A - 3B$로 정의한다.
$A = 2 + 3x^2 - x^3$, $B = x^2 + 3x + 1$일 때 $A \blacktriangledown (B \triangle A)$를 구하면?

① $2x^3 - 18x - 10$
② $2x^3 - 12x^2 - 18x - 10$
③ $2x^3 + 12x^2 + 18x + 10$
④ $2x^3 + 12x^2 + 18x - 10$
⑤ $2x^3 - 12x^2 + 18x + 10$

해설

$$\begin{aligned} A \blacktriangledown (B \triangle A) &= A \blacktriangledown (2B + A) \\ &= A - 3(2B + A) = -2A - 6B \end{aligned}$$

위와 같이 식을 간단히 정리한 후 A, B에 대입하여 정리한다.

9. 다음은 연산법칙을 이용하여 $(x+3)(x+2)$를 계산한 식이다.

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x+(x+3)\times 2\\ &= (x^2+3x)+(2x+6)\\ &= x^2+(3x+2x)+6\\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

위의 연산과정에서 사용한 연산법칙을 바르게 고른 것은?

① 교환법칙, 결합법칙
② 교환법칙, 분배법칙
③ 분배법칙, 결합법칙
④ 결합법칙, 분배법칙, 교환법칙
⑤ 연산법칙을 사용하지 않았다.

해설

$$\begin{aligned}(x+3)(x+2) &= (x+3)x+(x+3)\times 2 && \text{(분배)}\\ &= (x^2+3x)+(2x+6) && \text{(분배)}\\ &= x^2+(3x+2x)+6 && \text{(결합)}\\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

10. $(4x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 4x + 1) \div (x^2 - x + 1)$ 을 계산 하였을 때, 몫과 나머지의 합을 구하면?

① $4x^2 - 6x + 1$ ② $4x^2 - 7x + 3$ ③ $4x^2 - 4x + 5$
④ $4x^2 - 8x + 2$ ⑤ $4x^2 - 6x + 7$

해설

직접 나누어서 구한다.
몫 : $4x^2 - x - 2$, 나머지 : $-5x + 3$
$\therefore$ 몫과 나머지의 합은 $4x^2 - 6x + 1$

11. $2x^4 - x^3 + 2x^2 + a$를 $x^2 + x + 1$로 나누어 떨어지도록 하는 상수 a의 값을 구하면?

① -3　② 3　③ -6　④ 6　⑤ 12

해설

직접 나누어 본다.

$\therefore a - 3 = 0, a = 3$

해설

$x^2 + x + 1 = 0$이 되는 x값을 대입한다.

$x^2 + x + 1 = 0$에서 $(x-1)(x^2 + x + 1) = 0$, $x^3 - 1 = 0$

$\therefore x^3 = 1$

준 식의 좌변에 $x^3 = 1$, $x^2 = -x - 1$을 대입하면

$2x - 1 + 2(-x - 1) + a = 0$, $a - 3 = 0$

$\therefore\ a = 3$

12. 사차식 $3x^4-5x^2+4x-7$을 이차식 A로 나누었더니 몫이 x^2-2이고 나머지가 $4x-5$일 때, 이차식 A를 구하면?

① $3x^2-2$ ② $3x^2-1$ ③ $3x^2$

④ $3x^2+1$ ⑤ $3x^2+2$

해설

검산식 : $3x^4-5x^2+4x-7=A(x^2-2)+4x-5$

$$A=\frac{3x^4-5x^2-2}{x^2-2}=3x^2+1$$

13. 다항식 $f(x)$ 를 $x+\frac{1}{3}$ 으로 나누었을 때, 몫과 나머지를 $Q(x)$, R 라고 한다. 이 때, $f(x)$ 를 $3x+1$ 으로 나눈 몫과 나머지를 구하면?

① $Q(x)$, R ② $3Q(x)$, $3R$ ③ $3Q(x)$, R
④ $\frac{1}{3}Q(x)$, R ⑤ $\frac{1}{3}Q(x)$, $\frac{1}{3}R$

해설

$f(x)=Q(x)\left(x+\frac{1}{3}\right)+R=\frac{1}{3}Q(x)(3x+1)+R$

14. 다음 식을 전개한 것 중 옳은 것을 고르면?

① $(x-y-z)^2 = x^2 - y^2 - z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$

② $(3x-2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 18xy^2 - 8y^3$

③ $(x+y)(x-y)(x^2+xy-y^2)(x^2-xy+y^2) = x^9 - y^9$

④ $(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2) = x^4 + 4y^4$

⑤ $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+2x+2y+1) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$

해설

① $(x-y-z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$
② $(3x-2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$
③ $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
$= x^6 - y^6$
⑤ $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1)$
$= x^3 + y^3 - 3xy - 1$

15. $P=(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$ 의 값을 구하면?

① $2^{32}-1$ ② $2^{32}+1$ ③ $2^{31}-1$

④ $2^{31}+1$ ⑤ $2^{17}-1$

해설

주어진 식에 $(2-1)=1$ 을 곱해도 식은 성립하므로

$$
\begin{aligned}
P &= (2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)\\
&= (2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^16+1)\\
&= (2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)\\
&= \qquad \vdots\\
&= (2^{16}-1)(2^{16}+1)\\
&= 2^{32}-1
\end{aligned}
$$

16. 두 다항식 $(1+x+x^2+x^3)^3$, $(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$ 의 x^3 의 계수를 각각 a, b 라 할 때, $a-b$ 의 값은?

① 4^3-5^3　　② 3^3-3^4　　③ 0

④ 1　　⑤ -1

해설

두 다항식이 $1+x+x^2+x^3$ 을 포함하고 있으므로 $1+x+x^2+x^3 = A$ 라 놓으면

$(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$
$=(A+x^4)^3$
$=A^3+3A^2x^4+3Ax^8+x^{12}$
$=A^3+(3A^2+3Ax^4+x^8)x^4$

이 때 $(3A^2+3Ax^4+x^8)x^4$ 은 x^3 항을 포함하고 있지 않으므로 두 다항식의 x^3 의 계수는 같다.

$\therefore\ a-b=0$

17. $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ 이고, $a = \sqrt{3} + 1$ 일 때, $a^{x^2} \div a^{2\sqrt{2}x+3}$ 의 값을 구하면?

① $\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$ ② $\dfrac{4+\sqrt{3}}{4}$ ③ $\dfrac{2\sqrt{3}-3}{4}$

④ $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

해설

(ⅰ) $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$에서 $x - \sqrt{2} = \sqrt{3}$

$x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 3$

$\therefore\ x^2 - 2\sqrt{2}x = 1$

(ⅱ) $a^{x^2} \div a^{2\sqrt{2}x+3} = a^{x^2-2\sqrt{2}x-3} = a^{-2}$

$= \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$

18. $a^2 - b^2 = 2$ 일 때, $\{(a+b)^n + (a-b)^n\}^2 - \{(a+b)^n - (a-b)^n\}^2$ 의 값은?

① 2^n ② 2^{n+1} ③ 2^{n+2} ④ 2^{n+3} ⑤ 2^{n+4}

해설

$(a+b)^n = A,\ (a-b)^n = B$

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= \left(A^2 + 2AB + B^2\right) - \left(A^2 - 2AB + B^2\right) \\
&= 4AB \\
&= 4\left\{(a+b)(a-b)\right\}^n \\
&= 4 \times 2^n \\
&= 2^{n+2}
\end{aligned}
$$

19. $a=(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)\cdots(3^{1024}+1)$이라고 할 때 곱셈 공식을 이용하여 a의 값을 지수의 형태로 나타내면 $\frac{1}{k}(3^l+m)$이다. 이 때, $k+l+m$의 값을 구하면?

① 2046 ② 2047 ③ 2048 ④ 2049 ⑤ 2050

해설

$a=(3+1)(3^2+1)\cdots(3^{1024}+1)$
양변에 $(3-1)$을 곱하면
$(3-1)a=(3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)$
$\cdots(3^{1024}+1)$

$$\begin{aligned}2a&=(3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)\cdots(3^{1024}+1)\\&=(3^4-1)(3^4+1)\cdots(3^{1024}+1)\\&=(3^8-1)\cdots(3^{1024}+1)\\&\vdots\\&=(3^{2048}-1)\end{aligned}$$

양변을 2로 나누면
$a=\frac{1}{2}(3^{2048}-1)$
$\therefore\ k=2,\ l=2048,\ m=-1$
$\therefore\ k+l+m=2049$

20. 다음 다항식의 일차항의 계수는?

$$(1+x+x^2)^2(1+x)+(1+x+x^2+x^3)^3$$

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

ⅰ) $(1+x+x^2)^2(x+1)$ 의 일차항의 계수
: $(1+x+x^2)^2$ 의 일차항에 1을 곱할 때,
계수$=2$
: $(1+x+x^2)^2$ 의 상수항에 x를 곱할 때,
계수$=1$

ⅱ) $(1+x+x^2+x^3)^3$ 의 일차항의 계수
$x+x^2+x^3=Y$라 하면,
$(Y+1)^3=Y^3+3Y^2+3Y+1$
$3Y=3x+3x^2+3x^3$
일차항의 계수$=3$, 다른 항에는 일차항이 없다.

ⅰ), ⅱ)에서 $2+1+3=6$

21. $\dfrac{2005^3+1}{2005\times2004+1}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2006

해설

$2005=x$ 로 놓으면

$$\begin{aligned}(\text{준 식})&=\frac{x^3+1^3}{x(x-1)+1}\\&=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}\\&=x+1\\&=2006\end{aligned}$$

22. $x^2+x+1=0$일 때, $x^3+\dfrac{1}{x^3}$의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

$x^2+x+1=0$에서 양변을 x로 나누면

$x+\dfrac{1}{x}=-1$

$\therefore x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3x\cdot\dfrac{1}{x}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$

$=-1-3\cdot(-1)=2$

23. 실수 x가 $x^2-3x+1=0$을 만족할 때, $x^3+\dfrac{1}{x^3}$의 값을 구하면?

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

해설

준식의 양변을 x로 나누면

$x+\dfrac{1}{x}=3$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$=3^3-3\times3=18$$

24. $a+b+c=1$, $ab+bc+ca=1$, $abc=1$일 때, $a^3+b^3+c^3$의 값은?

① 3　② -3　③ 1　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{1}{9}$

해설

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$
$1 = a^2+b^2+c^2+2$
$\therefore\ a^2+b^2+c^2 = -1$
$a^3+b^3+c^3-3abc$
$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$a^3+b^3+c^3-3 = 1\cdot(-1-1) = -2$
$\therefore\ a^3+b^3+c^3 = 1$

25. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 $\frac{a-b+c}{a+b+c}=\frac{-a-b+c}{a-b-c}$일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 빗변의 길이가 a인 직각삼각형

② 빗변의 길이가 b인 직각삼각형

③ 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

④ $a=b$인 이등변삼각형

⑤ $b=c$인 이등변삼각형

해설

$\frac{a-b+c}{a+b+c}=\frac{-a-b+c}{a-b-c}$에서

$(a-b+c)(a-b-c)=(a+b+c)(-a-b+c)$

$(a-b+c)(a-b-c)+(a+b+c)(a+b-c)=0$

(좌변)

$=\{(a-b)+c\}\{(a-b)-c\}+\{(a+b)+c\}\{(a+b)-c\}$

$=(a-b)^2-c^2+(a+b)^2-c^2$

$=a^2-2ab+b^2-c^2+a^2+2ab+b^2-c^2$

$=2a^2+2b^2-2c^2$

따라서, $2a^2+2b^2-2c^2=0$이므로 $a^2+b^2=c^2$

그러므로 이 삼각형은 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.