1. $i^2 = -1$ 이라 할 때, 다음 중 제곱하여 음수가 되는 수의 개수는 ?

$-2, \quad -\sqrt{2}, \quad 2i, \quad -2i,$ $3i, \quad -3i, \quad 1-i, \quad 1+i$

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

$i^2 = -1$ 이므로 제곱해서 음수가 되는 수는 순허수, 즉 $ai(a \neq 0)$ 의 꼴이 되어야 한다.
$\therefore\ 2i,\ -2i,\ 3i,\ -3i$ 4 개,
$2, -\sqrt{2}$ 는 실수이므로
(실수)$^2 \geq 0$, $(1 \pm i)^2 = 1 \pm 2i - 1 = \pm 2i$ 가 된다.

2. $\dfrac{a}{1-i}+\dfrac{b}{1+i}=5$ 를 만족하는 두 실수 $a,\ b$ 에 대하여 곱 ab 의 값을 구하면?

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 25

해설

$\dfrac{a(1+i)}{2}+\dfrac{b(1-i)}{2}=5$
$a(1+i)+b(1-i)=10,$
$(a+b)+(a-b)i=10$
$a+b=10,\ a-b=0$
$2a=10,\ a=5,\ b=5,\ ab=25$

3. $\dfrac{2-i}{2+i}+\dfrac{2+i}{2-i}$ 를 간단히 하면? (단, $i=\sqrt{-1}$ 이다.)

① $\dfrac{6}{5}$　② 2　③ $\dfrac{8}{5}$　④ $\dfrac{8}{3}$　⑤ 3

해설

$$\begin{aligned}\frac{2-i}{2+i}+\frac{2+i}{2-i}&=\frac{(2-i)^2+(2+i)^2}{(2+i)(2-i)}\\&=\frac{3+3}{5}=\frac{6}{5}\end{aligned}$$

4. $i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + 50i^{50}$ 의 값은?

① $-26-25i$ ② $-26+25i$ ③ 0

④ $-25+26i$ ⑤ $25+26i$

해설

$i + 2i^2 + 3i^3 + \cdots + 50i^{50}$

$= \{i + 2\cdot(-1) + 3\cdot(-i) + 4\cdot 1\} + \{5i + 6\cdot(-1) + 7\cdot(-i) + 8\cdot 1\}$

$+ \cdots + \{45i + 46\cdot(-1) + 47\cdot(-i) + 48\cdot 1\} + 49i + 50\cdot(-1)$

$12(2-2i) + 49i - 50 = -26 + 25i$

5. 복소수 z의 켤레복소수 $\bar{z}$라 할 때 $(1+2i)z+3(2-\bar{z})=0$을 만족하는 복소수 z를 구하면?

① $z=2-3i$　② $z=4-3i$　③ $z=6-3i$
④ $z=2+3i$　⑤ $z=4+3i$

해설

$z=a+bi, \bar{z}=a-bi$라 하면

$$(\text{준식})=(1+2i)(a+bi)+3(2-a+bi)$$
$$=(6-2a-2b)+(2a+4b)i$$

$\therefore 6-2a-2b=0, 2a+4b=0$

$\therefore a=6, b=-3$

$\therefore z=6-3i$

6. $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 0$을 풀면?

① $x = -\sqrt{2}$ ② $x = \sqrt{2}$ ③ $x = 0$
④ $x = 4 - \sqrt{2}i$ ⑤ $x = 6$

해설
$x^2 - 2\sqrt{2}x + (\sqrt{2})^2 = (x - \sqrt{2})^2 = 0$
$\therefore\ x = \sqrt{2}$

7. 이차방정식 $3x^2 - 6x + k = 0$이 허근을 갖도록 실수 k의 범위를 정하면?

① $k \leq 3$ ② $k > 3$ ③ $k \leq 2$ ④ $k > 2$ ⑤ $k < 1$

해설

이차방정식이 허근을 가질 조건 : $D < 0$

$3x^2 - 6x + k = 0$

$\frac{D}{4} = 9 - 3k < 0$

$\therefore\ k > 3$

8. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(k-a)x+k^2+b-3=0$이 k의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 상수 a, b의 값은?

① $a=1, b=2$ ② $a=0, b=3$ ③ $a=-1, b=2$
④ $a=0, b=2$ ⑤ $a=-1, b=3$

해설

중근을 가지려면, 편별식이 0이다.
$D'=(k-a)^2-(k^2+b-3)=0$
$\Rightarrow\quad -2ak+a^2-b+3=0$
모든 k 에 대해 성립하려면
$-2a=0,\ a^2-b+3=0$
$\therefore\quad a=0, b=3$

9. 사차방정식 $x(x-1)(x+1)(x+2)-8=0$ 의 모든 해의 곱을 구하면?

① -8 ② -2 ③ 1 ④ 4 ⑤ 8

해설

$x(x-1)(x+1)(x+2)-8=0$
$\{x(x+1)\}\{(x-1)(x+2)\}-8=0$
$(x^2+x)(x^2+x-2)-8=0$
$x^2+x=t$ 라 하면, $t(t-2)-8=0$
$\therefore\ t^2-2t-8=x^4+2x^3-x^2-2x-8=0$
근과 계수와의 관계에 의해서, 근을 α, β, γ, δ 라 하면 $\therefore$ 모든 해의 곱은 -8

해설

근과 계수의 관계에서 모든 해의 곱을 나타내는 것은 다항식을 전개했을 때의 상수항이므로 -8 (단, 다항식의 최고차항의 차수가 홀수일 때는 상수항의 부호를 반대로 바꾼것이 모든 해의 곱이다.)

10. 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$의 해가 $-2 < x < 1$일 때 부등식 $cx^2 - bx - a > 0$을 만족하는 한 자리의 자연수 x의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 4개 ④ 6개 ⑤ 9개

해설

$ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $-2 < x < 1$ 이므로 $a < 0$
해가 $-2 < x < 1$ 이고 이차항의 계수가 1인 부등식은 $(x+2)(x-1) < 0$,
즉 $x^2 + x - 2 < 0$ 양변에 a 를 곱하면
$ax^2 + ax - 2a > 0$ 이 부등식이
$ax^2 + bx + c > 0$ 과 같으므로
$b = a, c = -2a \cdots$ ㈎
㈎를 $cx^2 - bx - a > 0$ 에 대입하면
$-2ax^2 - ax - a > 0$, $2x^2 + x + 1 > 0 (\because -a > 0)$
이 때 방정식 $2x^2 + x + 1 = 0$ 의 판별식
$D = 1^2 - 4 \cdot 2 = -7 < 0$ 이므로
$2x^2 + x + 1 > 0$ 은
모든 실수 x 에 대하여 성립한다.
따라서 주어진 부등식을 만족하는
한자리의 자연수는 $1, 2, 3, \cdots, 9$ 의 9개이다.

11. 연립부등식 $\begin{cases} x^2-1<x+1<x^2-3x+1 \\ x+3>-x+2 \end{cases}$ 의 해가 $a<x<b$ 일 때, $2a+b$의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$\begin{cases} \underbrace{x^2-1 < x+1}_{(가)} \\ \underbrace{x+1 < x^2-3x+1}_{(나)} \\ x+3 > -x+2 \cdots (다) \end{cases}$

(가)에서 $x^2-x-2<0, (x-2)(x+1)<0$

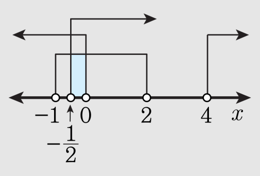
$\therefore -1<x<2$

(나)에서 $x^2-4x>0, x(x-4)>0$

$\therefore x<0$ 또는 $x>4$

(다)에서 $2x>-1$

$\therefore x>-\frac{1}{2}$



$-\frac{1}{2}<x<0$

따라서 $a=-\frac{1}{2}, b=0$이므로 $2a+b=-1+0=-1$

12. 이차방정식 $x^2 - mx + n = 0$의 두 근을 α, β라고 할 때, 이차방정식 $x^2 - 4x + 1 = 0$의 두 근은 $\alpha + \beta,\ \alpha\beta$이다. 이 때, $m^3 + n^3$의 값은?

① 36　② 40　③ 42　④ 45　⑤ 52

해설

$x^2 - mx + n = 0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha + \beta = m,\ \alpha\beta = n$

$x^2 - 4x + 1 = 0$의 두 근이 $\alpha + \beta,\ \alpha\beta$이므로

두 근의 합 $(\alpha + \beta) + (\alpha\beta) = m + n = 4$

두 근의 곱 $(\alpha + \beta)\alpha\beta = mn = 1$

$$\begin{aligned} \therefore m^3 + n^3 &= (m+n)^3 - 3mn(m+n) \\ &= 64 - 12 = 52 \end{aligned}$$

13. 이차함수 $y = x^2 - ax + 3$의 그래프가 직선 $y = 0$과 두 점에서 만나기 위한 자연수 a의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

이차함수 $y = x^2 - ax + 3$의 그래프가 x축 $(y = 0)$과 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.
즉 이차방정식 $x^2 - ax + 3 = 0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면
$D = a^2 - 12 > 0$에서
$a < -2\sqrt{3}$ 또는 $a > 2\sqrt{3}$
따라서 자연수 a의 최솟값은 4이다.

14. 이차함수 $y=-x^2+kx+k$ 의 그래프와 직선 $y=-2x+1$ 이 만나지 않도록 하는 k 값의 범위를 구하면?

① $-8<k<-1$　② $-8<k<0$　③ $-6<k<1$
④ $-6<k<2$　⑤ $-6<k<2$

해설

두 함수가 만나지 않으려면
두 식을 연립하였을 때 판별식이
0보다 작아야 한다.
$\Rightarrow\quad -2x+1=-x^2+kx+k$
$\Rightarrow\quad x^2-(k+2)x+1-k=0$
$D=(k+2)^2-4(1-k)<0$
$k^2+8k<0$
$\Rightarrow\quad -8<k<0$

15. $-1 \le x \le 2$ 에서 이차함수 $f(x) = -x^2 + 2x + k$ 의 최댓값이 3 일 때, $f(x)$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -1

해설

$f(x) = -x^2 + 2x + k = -(x-1)^2 + k + 1$
$-1 \le x \le 2$ 에서 함수 $f(x)$ 는
$x = 1$ 일 때, 최대이고
최댓값은 $k + 1$ 이므로 $k + 1 = 3$
$\therefore k = 2$
따라서, $f(x) = -(x-1)^2 + 3$ 이므로
$x = 1$ 일 때 최댓값 3을 갖는다.
$-1 \le x \le 2$에서 $f(-1) = -1$, $f(2) = 2$
이므로 최소는 $x = -1$일 때, 최솟값
-1을 갖는다.

16. 다음 연립방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x+y+z+w=1 \\ 2x+y+3z+2w=1 \\ 3x-2z-2w=1 \\ 4x+y-w=0 \end{cases}$$

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=1$

▷ 정답 : $y=-1$

▷ 정답 : $z=-2$

▷ 정답 : $w=3$

해설

$$\begin{cases} x+y+z+w=1\cdots① \\ 2x+y+3z+2w=1\cdots② \\ 3x-2z-2w=1\cdots③ \\ 4x+y-w=0\cdots④ \end{cases}$$

④ 에서 $y=w-4x$ 를 ①, ②에 대입하면 다음을 얻는다.

$-3x+z+2w=1$ $\cdots\cdots$ ①′

$-2x+3z+3w=1$ $\cdots\cdots$ ②′

$3x-2z-2w=1$ $\cdots\cdots$ ③

①′ + ③ 에서 $z=-2$ $z=-2$ 를 ②′, ③에 대입하면

$-2x+3w=7$ $\cdots\cdots$ ⑤

$3x-2w=-3$ $\cdots\cdots$ ⑥

⑤, ⑥을 연립하여 풀면 $x=1,\ w=3$

$x=1,\ w=3$ 을 ④에 대입하면 $y=-1$

$\therefore x=1,\ y=-1,\ z=-2,\ w=3$

17. 오차방정식 $x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$의 허근을 α ,β라 할 때, $\alpha + \beta$의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

방정식 $x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$에서

$(x+1)(x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1) = 0$

$\therefore\ x + 1 = 0$ 또는

$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$

(i) $x + 1 = 0$에서 $x = -1$

(ii) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$의 양변을

x^2으로 나누면

$$x^2 - 4x + 5 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(s^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 5$$

$$= 0\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0$$

이 때, $x + \frac{1}{x} = t$로 치환하면

$t^2 - 4t + 3 = 0,\ (t-1)(t-3) = 0$

$\therefore\ t = 1$ 또는 $t = 3$

①$x + \frac{1}{x} = 1$일 때, $x^2 - x + 1 = 0$

$\therefore\ x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

②$x + \frac{1}{x} = 3$일 때, $x^2 - 3x + 1 = 0$

$\therefore\ x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$

따라서, 주어진 방정식의

두 허근이 $\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$이므로

두 허근 α, β의 합은

$\alpha + \beta = 1$이다.

18. 삼차방정식 $x^3+(2a+3)x^2-(6a+5)x+(4a+1)=0$이 중근을 가질 때, 상수 a의 값을 구하면?

① $a=2,\ -4\pm\sqrt{11}$　　② $a=-2,\ -2\pm\sqrt{10}$
③ $a=3,\ -3\pm\sqrt{5}$　　④ $a=1,\ 4\pm\sqrt{10}$
⑤ $a=-1,\ -2\pm2\sqrt{2}$

해설

$f(x)=x^3+(2a+3)x^2-(6a+5)x+4a+1$이라 하면
$f(1)=0$이므로 $f(x)$는 $(x-1)$을 인수로 갖는다.

1	1	2a+3	-6a-5	4a+1
		1	2a+4	-4a-1
	1	2a+4	-4a-1	0

조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면
$(x-1)\left\{x^2+2(a+2)x-4a-1\right\}=0$
(i) $x^2+2(a+2)x-4a-1=0$이 $x\neq1$인 경우
$D=0$이므로, $a^2+8a+5=0$
$\therefore\ a=-4\pm\sqrt{11}$
(ii) $x^2+2(a+2)x-4a-1=0$이 $x=1$을 근으로 갖는 경우
$x=1$을 대입하면 $1+2(a+2)-4a-1=0$
$\therefore\ a=2$
(i), (ii)에서 $a=2,\ -4\pm\sqrt{11}$