1. 모든 실수 x에 대하여 부등식 $k^2x+1>2kx+k$가 성립할 때, k값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$k^2x+1>2kx+k$에서
$(k^2-2k)x>k-1$,
$k(k-2)x>k-1$
해가 모든 실수이므로
$k(k-2)=0,\ k-1<0$ 이어야 한다.
$\therefore\ k=0$

2. 방정식 $(k^2-3)x+1=-k(2x-1)$ 에 대하여 해가 무수히 많이 존재하기 위한 k 의 값을 k_1, 해가 존재하지 않기 위한 k 의 값을 k_2 라 할 때, k_1+k_2 의 값을 구하면?

① -1 ② 3 ③ -3 ④ 1 ⑤ -2

해설

$(k^2+2k-3)x=k-1$, $(k-1)(k+3)x=k-1$
$k=1$ 일 때, $0 \cdot x=0$ (부정)
$\therefore\ k_1=1$
$k=-3$ 일 때, $0 \cdot x=-4$ (불능)
$\therefore\ k_2=-3$
$\therefore\ k_1+k_2=-2$

3. 일차방정식 $a^2x+1=a^4-x$ 의 해는? (단, a 는 실수)

① a ② $a+1$ ③ $a-1$

④ a^2-1 ⑤ a^2+1

해설

$a^2x+1=a^4-x$ 에서 $a^2x+x=a^4-1$

$(a^2+1)x=(a^2-1)(a^2+1)$

$\therefore x=a^2-1(\because a^2+1>0)$

4. 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-3=0$ 의 한 근이 $1+\sqrt{2}i$ 일 때, 두 실수 a, b 의 곱 ab 의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① -15　　② -10　　③ 0　　④ 5　　⑤ 10

해설

한 근이 $1+\sqrt{2}i$이므로 켤레근은 $1-\sqrt{2}i$

세 근이 α, β, γ 일때 $\alpha\beta\gamma=3$이므로, $\alpha=1+\sqrt{2}i$, $\beta=1-\sqrt{2}i$

라 하면, $(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)\cdot\gamma=3$

$3\cdot\gamma=3$

$\gamma=1$

$\alpha+\beta+\gamma=-a=(1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)+1=3$

$a=-3$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\beta=b=3+(1-\sqrt{2}i)\cdot 1+1\cdot(1+\sqrt{2}i)=5$

$b=5$

$\therefore\ ab=(-3)\cdot 5=-15$

5. 삼차방정식 $x^3+1=0$의 한 허근을 α라 할 때, 옳은 내용을 모두 고르면?(단, $\overline{\alpha}$는 α의 켤레복소수이다.)

① $\alpha^2-\alpha+1=0$
② $\alpha+\overline{\alpha}=\alpha\overline{\alpha}=-1$
③ $\alpha^3+\overline{\alpha}^3=\alpha^2+\overline{\alpha}^2$
④ $\dfrac{\alpha+1}{\alpha^2}+\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\alpha}^2+1}=2$
⑤ $\alpha^2\overline{\alpha}+\alpha\overline{\alpha}^2=1$

해설

$x^3=-1,\ (x+1)(x^2-x+1)=0$
$\alpha^3=\overline{\alpha}^3=-1,$
$\alpha^2-\alpha+1=\overline{\alpha}^2-\overline{\alpha}+1=0$
$\alpha+\overline{\alpha}=1,$
$\alpha\overline{\alpha}=1$
①$\alpha^2+\alpha+1=0$(○)
②$\alpha+\overline{\alpha}=1$(×)
③$\alpha^3+\overline{\alpha}^3=-1-1=-2$
$\alpha^2+\overline{\alpha}^2=(\alpha+\overline{\alpha})^2-2=-1$(×)
④$\dfrac{\alpha+1}{\alpha^2}+\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\alpha}^2+1}$
$=\dfrac{\alpha+1}{1-\alpha}+\dfrac{\overline{\alpha}}{\alpha}$
$=\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}+1=\dfrac{2}{1-\alpha}$(×)
⑤$\alpha^2\overline{\alpha}+\alpha\overline{\alpha}^2$
$=\alpha\overline{\alpha}(\alpha+\overline{\alpha})=1$(○)

6. 다음 중 옳은 것으로 짝지어진 것은?

(가) $a > b$ 이면 $a^2 > b^2$

(나) $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ 이면 $a > b$

(다) $\frac{a}{b} > \frac{c}{d} > 0$ 이면 $ad > bc$

(라) $a > b > 0 > c > d$ 이면 $ad < bc$

① (가), (나) ② (나), (라) ③ (다), (라) ④ (나), (다) ⑤ (가), (다)

해설

(가) (반례) $a = 1,\ b = -2$일 때 성립하지 않음.
(나) 항상 성립함 $(a > 0,\ b \geq 0)$
(다) (반례) $a = -2,\ b = -1,\ c = 1, d = 1$일 때
성립하지 않음.
또는 $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd} > 0$에서
$bd > 0$일 때, $ad - bc > 0 \quad \therefore\ ad > bc$
$bd < 0$일 때, $ad - bc < 0 \quad \therefore\ ad < bc$
$\therefore$ 성립하지 않음.
(라) $ad < 0,\ bc < 0$이므로 $|ad| > |bc|$에서 $ad < bc$

7. $-2 \le x \le -1$ 일 때, $A = \dfrac{12}{2-x}$ 가 취하는 값의 범위를 구하면 $p \le A \le q$ 이다. 이 때, pq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$-2 \le x \le -1$ 의 각 변에 -1 을 곱하면

$1 \le -x \le 2$

다시 각 변에 2를 더하면 $3 \le 2-x \le 4$

각 변의 역수를 취하면 $\dfrac{1}{4} \le \dfrac{1}{2-x} \le \dfrac{1}{3}$

각 변에 12 를 곱하면 $3 \le \dfrac{12}{2-x} \le 4$

$\therefore p = 3, q = 4$

$\therefore pq = 12$

8. $|x+1|+|x-2|=x+3$을 만족하는 해의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

i) $x<-1$일 때,
$-x-1-x+2=x+3$
$\therefore\ x=-\frac{2}{3}$ (모순)
ii) $-1\le x<2$일 때,
$x+1-x+2=x+3$
$\therefore\ x=0$
iii) $x\ge 2$일 때,
$x+1+x-2=x+3$
$\therefore\ x=4$

9. $|x-1| = 3 - \sqrt{x^2}$ 의 해를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

▷ 정답 : −1

해설

$|x-1| = 3 - |x|$ 에서,
$|x| + |x-1| = 3$ 이다.
i) $x < 0$ 일 때,
$-x - (x-1) = 3$
$\therefore x = -1$
ii) $0 \le x < 1$ 일 때,
$x - (x-1) = 3$
$0 \cdot x + 1 = 3$ 이므로 불능
iii) $x \ge 1$ 일 때,
$x + (x-1) = 3$
$\therefore x = 2$
따라서 구하는 해는
$x = -1$ 또는 $x = 2$ 이다.

10. 다음을 읽고 물음에 답하여라.

> 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$ (a,b,c는 실수) 에서 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 라 두고 $x=1+2i$를 대입하면 $f(1+2i)=(1+2i)^3+a(1+2i)^2+b(1+2i)+c=0$ 이 된다. 이것을 전개하여 정리하면 $(-11-3a+b+c)+(-2+4a+2b)i=0$
> a,b,c 가 실수이므로 이제 $x=1-2i$ 를 대입하면 $f(1-2i)=(1-2i)^3+a(1-2i)^2+b(1-2i)+c=(-11-3a+b+c)-(-2+4a+2b)i=0$
> 따라서 (　　(가)　　)

(가) 에 들어갈 말로 가장 알맞는 것을 고르면?

① 삼차방정식$x^3+ax^2+bx+c=0$ ($a,\ b,\ c$ 는 실수) 의 한 근이 $1+2i$ 이면, $1-2i$ 도 근임을 알 수 있다.
② 삼차방정식$x^3+ax^2+bx+c=0$ ($a,\ b,\ c$ 는 실수) 의 한 근이 $1-2i$ 이면, $1+2i$ 도 근임을 알 수 있다.
③ 삼차방정식$x^3+ax^2+bx+c=0$ ($a,\ b,\ c$ 는 실수) 의 한 근이 $1+2i$ 라고 해서, 반드시$1-2i$ 가 근이 되는 것은 아니다.
④ 삼차방정식$x^3+ax^2+bx+c=0$ ($a,\ b,\ c$ 는 실수) 의 한 근이 $1-2i$ 라고 해서, 반드시$1+2i$ 가 근이 되는 것은 아니다.
⑤ 삼차방정식$x^3+ax^2+bx+c=0$ ($a,\ b,\ c$ 는 실수) 은 반드시 하나의 실근을 가진다.

해설

$x=1+2i$ 를 대입한 결과와 $x=1-2i$를 대입한 결과가 같다.

11. $x^3+1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ 일 때, $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ -1 ⑤ -3

해설

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$는 방정식
$x^3+1=0$의 세 근이므로
$\alpha^3=\beta^3=\gamma^3=-1$
$\therefore\ \alpha^3+\beta^3+\gamma^3=-3$

12. $x^3 = 1$의 한 허근이 ω일 때, $\omega^{10} + \omega^5 + 1$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$w^3 = 1,$
$x^3 - 1 = 0$
$\Rightarrow$ $(x-1)(x^2+x+1) = 0$의 한 허근이 ω
$\Rightarrow w^2 + w + 1 = 0$
$\omega^{10} + \omega^5 + 1 = (w^3)^3 w + w^2 \cdot w^3 + 1$
$= w^2 + w + 1$
$= 0$

13. 방정식 $|x+5|=1$를 만족하는 x의 값들의 합은?

① -9 ② -10 ③ -11 ④ -12 ⑤ -13

해설

$|x+5|=1$

$\Rightarrow\ x+5=1$ 또는 $x+5=-1$

$\therefore\ x=-4$ 또는 $x=-6$

14. $-3a-2<-3b-2$일 때, 다음 중 옳은 것은?

① $a<b$
② $-3a>-3b$
③ $5a-3>5b-3$
④ $3-a>3-b$
⑤ $\frac{a}{3}<\frac{b}{3}$

해설

$-3a-2<-3b-2\cdots$㉠
(㉠ $+2$) $\div(-3)$ 하면, $a>b$ 이다.
따라서 만족하는 식은 $5a-3>5b-3$

15. 0이 아닌 세 실수 a, b, c에 대하여 $a > b,\ c < 0$일 때, 다음 보기 중 항상 옳은 것을 <u>모두</u> 고르면 몇 개인가?

(1) $ac < bc$	(2) $a^2 > b^2$	(3) $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
(4) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$	(5) $a^3 > b^3$	

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

(1) $a > b,\ ac < bc \Rightarrow (\bigcirc)$

(2) (반례) $a = 1,\ b = -2$

$1 > -2,\ (1)^2 < (-2)^2 \Rightarrow (\times)$

(3) $a > b,\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \Rightarrow (\bigcirc)$

(4) (반례) $1 > -2,\ 1 > -\frac{1}{2} \Rightarrow (\times)$

(5) $a^3 > b^3 \Rightarrow (\bigcirc)$

$\therefore$ 참 : (1), (3), (5)

16. $0 \le x + 2y \le 1$, $0 \le -x + y \le 1$ 일 때 $2x + 3y$ 의 최댓값과 최솟값의 차는 ?

① 0 ② 1 ③ 3 ④ 4 ⑤ 6

해설

$$\begin{array}{rl} & 0 \le x + 2y \le 1 \\ +) & \underline{0 \le -x + y \le 1} \\ & 0 \le 3y \le 2 \cdots\cdots ㉠ \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} & 0 \le x + 2y \le 1 \\ -) & \underline{0 \le -2x + 2y \le 2} \\ & -2 \le 3x \le 1 \rightarrow -\frac{2}{3} \le x \le \frac{1}{3} \cdots\cdots ㉡ \end{array}$$

㉠ + ㉡ × 2 하면

$$\begin{array}{rl} & 0 \le 3y \le 2 \\ +) & \underline{-\frac{4}{3} \le 2x \le \frac{2}{3}} \end{array}$$

$\therefore -\frac{4}{3} \le 3y + 2x \le \frac{8}{3}$

$\therefore$ 최댓값 $-$ 최솟값 $= \frac{8}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{12}{3} = 4$

17. x에 대한 부등식 $x+2 \le ax+3$ 의 해가 모든 실수일 때, 상수 a의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x+2 \le ax+3$에서 $(1-a)x \le 1$이 부등식의 해가 모든 실수이고 우변이 양수이므로 x의 계수는 0이어야 한다.

$1-a=0$

$\therefore a=1$

18. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^2-xy+y^2=3 \end{cases}$ 의 해를 $x=a$, $y=b$라 할 때, ab의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^2+y^2=5 \quad \cdots \quad$ ㉠

$x^2-xy+y^2=3 \quad \cdots \quad$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면 $5-xy=3$, $xy=2$

$\therefore \quad ab=2$

19. 다음 방정식의 모든 해의 합을 구하여라.

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ 에서
$x^2 = t$ 로 놓으면
$t^2 - 13t + 36 = 0$, $(t-4)(t-9) = 0$
$\therefore\ t = 4$ 또는 $t = 9$
(ⅰ) $t = 4$ 일 때, $x^2 = 4$
$\therefore\ x = \pm 2$
(ⅱ) $t = 9$ 일 때, $x^2 = 9$
$\therefore\ x = \pm 3$
따라서 모든 해의 합은
$(-2) + 2 + (-3) + 3 = 0$

20. $\dfrac{1}{\sqrt{-2}-\sqrt{-1}}$ 의 값은 ?

① $1-\sqrt{2}$ ② $-1-\sqrt{2}$ ③ $(1+\sqrt{2})i$

④ $-(1+\sqrt{2})i$ ⑤ $(1-\sqrt{2})i$

해설

$$\frac{1}{\sqrt{-2}-\sqrt{-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}\times\frac{1}{i}$$
$$= (\sqrt{2}+1)\times(-i)$$
$$= -(1+\sqrt{2})i$$

21. 방정식 $|x+1|+\sqrt{(x-2)^2}=x+3$의 근을 α, β라 할 때 $\alpha+\beta$의 값을 구하면?

① 0 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

해설

ⅰ) $x<-1$일 때,
$-(x+1)-(x-2)=x+3$
$\therefore\ x=-\frac{2}{3}$ ($x<-1$에 부적합)
ⅱ) $-1 \le x < 2$일 때,
$x+1-(x-2)=x+3$
$\therefore\ x=0$
ⅲ) $x \ge 2$일 때,
$x+1+x-2=x+3$
$\therefore\ x=4$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 $x=0,\ 4$
$\therefore\ \alpha+\beta=4$

22. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4 + 2x^3 + ax^2 + bx + 15 = 0$의 한 근이 $1 + 2i$일 때, 나머지 세 근 중 실근의 합은?

① -4 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 4

해설

두 허근은 $1 + 2i$, $1 - 2i$ 나머지 두 실근을 α, β라 하면
네 근의 합 : $(1 + 2i) + (1 - 2i) + \alpha + \beta = -2$
$\therefore$ 두 실근의 합 : $\alpha + \beta = -4$

23. 연립부등식 $\begin{cases} 1 < x + 5y < 5 \\ -2 < 2x + 7y < 3 \end{cases}$ 을 성립시키는 정수로 이루어진 순서쌍 $(x,\ y)$중 $x + y$의 최댓값과 최솟값을 각각 $M,\ m$이라 할 때, $M + 2m$의 값을 구하면?

① -9 ② -13 ③ -18 ④ -22 ⑤ -26

해설

$1 < x + 5y < 5$ $\cdots\cdots$ ㉠
$-2 < 2x + 7y < 3$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠ $\times (-2) +$ ㉡을 하면
$-10 < -2x - 10y < -2$ $\cdots\cdots$ ㉢
$-2 < 2x + 7y < 3$ $\cdots\cdots$ ㉣
㉢ $+$ ㉣ $= -12 < -3 < 1$
그러므로, $-\dfrac{1}{3} < y < 4$
그런데, y는 정수이므로 $y = 0,\ 1,\ 2,\ 3$
이것을 ㉠, ㉡에 대입하여 적합한 x의 값을 구하면
$(x,\ y) = (-3,\ 1),\ (-6,\ 2),\ (-7,\ 2),\ (-11,\ 3)$
따라서, $x + y$의 최댓값은$-3 + 1 = -2$이고,
최솟값은$-11 + 3 = -8$이다.
$\therefore M = -2,\ m = -8 \ \therefore\ M + 2m = -18$

24. 방정식 $x^3+x^2+x+1=0$의 한 근을 α라 할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$

② $\alpha^4=1$

③ $\alpha^{100}+\alpha^{50}+\alpha^{25}+\alpha^{15}+1=1$

④ α는 실수가 아니다.

⑤ α^3은 방정식 $x^3+x^2+x+1=0$의 한 근이다.

해설

① α가 방정식
$x^3+x^2+x+1=0$의 한 근이므로,
$\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$
② α^4-1
$=(\alpha-1)(\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)=0$이므로
$\alpha^4=1$
③ $\alpha^{100}+\alpha^{50}+\alpha^{25}+\alpha^{15}+1$
$=(\alpha^4)^{25}+(\alpha^4)^{12}\cdot\alpha^2+(\alpha^4)^6\cdot\alpha+(\alpha^4)^3\cdot\alpha^3+1$
$=1+\alpha^2+\alpha+\alpha^3+1=1$
④ $x^3+x^2+x+1=(x^2+1)(x+1)=0$에서
$x=-1$이라는 실근이 존재하므로
α는 실수일 수 있다.
⑤ $x=\alpha^3$을 방정식
$x^3+x^2+x+1=0$에 대입하면,
$\alpha^9+\alpha^6+\alpha^3+1$
$=(\alpha^4)^2\cdot\alpha+\alpha^4\cdot\alpha^2+\alpha^3+1$
$=\alpha+\alpha^2+\alpha^3+1=0$
$(\because\ \alpha^4=1)$

25. a, b, c는 실수이고, $a(a+b+c)>0$, $a(b+2a)<0$을 만족시킬 때, ab $\boxed{\text{가}}$ 0, $b(a+b+c)$ $\boxed{\text{나}}$ 0이다. 가, 나에 알맞은 기호를 차례로 쓰면?

① $<$, $<$

② $<$, $>$

③ $>$, $>$

④ $>$, $<$

⑤ 결정할 수 없다.

해설

$a(a+b+c)>0$에서 $a \neq 0$, $a+b+c \neq 0$임을 알 수 있다.
한편 $a(b+2a) = ab+2a^2 < 0$에서 $ab < -2a^2 < 0$이므로 $ab<0$이다.
또 $ab < 0$이므로 $ab(a+b+c)^2 < 0$에서 $\{a(a+b+c)\}\{b(a+b+c)\}<0$이다.
그런데, $a(a+b+c)>0$이므로 $b(a+b+c)<0$이다.