1. 모든 양수 m, n 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 항상 $f(mn) = f(m) + f(n)$ 만족한다.
$f(2) = a, f(3) = b$ 일 때 $f(24)$ 를 a, b 를 써서 나타내면?

① $a + 2b$ ② $2a + b$ ③ $2a + 3b$

④ $3a + b$ ⑤ $3a + 2b$

해설

$$f(24) = f(2^3 \cdot 3) = f(2^3) + f(3)$$
$$f(2^3) = f(2^2 \cdot 2) = f(2^2) + f(2)$$
$$= \{f(2) + f(2)\} + f(2) = 3f(2)$$

따라서 $3f(2) + f(3) = 3a + b$

2. 함수 $f(x)$가 $f(x) = x^2+2x-3$ 이고 임의의 실수 x에 대하여 $g(x+1) = f(x-1)$ 이 성립할 때, $g(0)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

등식 $g(x+1) = f(x-1)$ 의 양변에

$x = -1$을 대입하면

$$
\begin{aligned}
g((-1)+1) = g(0) &= f((-1)-1) \\
&= f(-2) = (-2)^2 + 2 \times (-2) - 3 \\
&= -3
\end{aligned}
$$

3. 함수 $f(x)$ 는 임의의 두 실수 a, b 에 대하여 $f(a+b)=f(a)+f(b)$ 를 만족시킨다. 이러한 함수를 다음에서 고르면?

① $f(x)=|x|$

② $f(x)=-x^2$

③ $f(x)=3x$

④ $f(x)=2x+3$

⑤ $f(x)=x^3+3x$

해설

① $f(a+b)=|a+b|$

$f(a)+f(b)=|a|+|b|$

이 때 $|a+b|\le|a|+|b|$

② $f\ (a+b)=-(a+b)^2=-a^2-2ab-b^2$

$f(a)+f(b)=-a^2-b^2$

③ $f(a+b)=3(a+b)=3a+3b=f(a)+f(b)$

④ $f(a+b)=2(a+b)+3$

$f(a)+f(b)=2a+3+2b+3=2(a+b)+6$

⑤ $$\begin{aligned} f(a+b) &= (a+b)^3+3(a+b) \\ &= (a+b)(a^2+2ab+b^2+3) \\ f(a)+f(b) &= a^3+3a+b^3+3b \\ &= a^3+b^3+3(a+b) \\ &= (a+b)(a^2-ab+b^2+3) \end{aligned}$$

4. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $f(x) = x^3 - 2x + 1$, $g(x+1) = f(x+2)$로 정의될 때, $g(0)$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$g(x+1) = f(x+2)$에 $x = -1$을 대입하면

$g(0) = f(1)$

$f(1) = 1 - 2 + 1 = 0$

$\therefore\ g(0) = 0$

5. 함수 $f : A \rightarrow B$ 에서 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \left\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right\}$ 이고, $f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = 1+\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ 일 때, $\{f(1)\}^2+\{f(2)\}^2+\{f(3)\}^2+\{f(4)\}^2$ 의 값을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$f(1)+f(2)+f(3)+f(4) = 1+\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ 이므로
$B = \left\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\right\}$ 에서 $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ 을 사용하여 $1+\sqrt{2}+2\sqrt{3}$ 을 만들 수 있는 경우는 더하는 순서에 상관없이 $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{3}$ 으로 표현된다.
이 때, 정의역 중에서 $1, \sqrt{2}$ 에 대응하는 것은 1개이고 $\sqrt{3}$ 에 대응하는 것은 2개이어야 한다.
따라서 $\{f(1)\}^2+\{f(2)\}^2+\{f(3)\}^2+\{f(4)\}^2$
$= 1^2+(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2 = 9$

6. 임의의 두 양수 x, y에 대하여 $f(xy) = f(x) + f(y)$이고 $f(3) = 1$일 때, $f(27)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$x = 3,\ y = 3$ 일 때

$f(9) = f(3 \cdot 3) = f(3) + f(3) = 1 + 1 = 2$

$x = 9,\ y = 3$ 일 때

$f(27) = f(9 \cdot 3) = f(9) + f(3) = 2 + 1 = 3$

7. 함수 f가 모든 실수 $x,\ y$에 대하여 $f(x+y)=f(x)+f(y)$를 만족할 때, $f(0)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x+y)=f(x)+f(y)$ 에서
$x=0,\ y=0$ 을 대입하면
$f(0+0)=f(0)+f(0),\ f(0)=2f(0)$
$\therefore\ f(0)=0$

8. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 $f(1)=3$ 이고, 모든 실수 x 에 대하여

$f(x+1)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$ 를 만족시킨다. 이 때, $f(1998)$ 의 값은?

① 3　　② 2　　③ -1　　④ -2　　⑤ -3

해설

$$f(2)=\frac{1+f(1)}{1-f(1)}$$
$$=\frac{1+3}{1-3}=-2$$
$$f(3)=\frac{1+f(2)}{1-f(2)}$$
$$=\frac{1-2}{1+2}=-\frac{1}{3}$$
$$f(4)=\frac{1+f(3)}{1-f(3)}$$
$$=\frac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$
$$f(5)=\frac{1+f(4)}{1-f(4)}$$
$$=\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=3$$

$f(5)=f(1)=3$ 이므로

$f(6)=f(2)=-2$, $f(7)=f(3)=-\dfrac{1}{3}$

$f(8)=f(4)=\dfrac{1}{2}$, $f(9)=f(5)=f(1)=3, \cdots$

이와 같이 $f(n)$ (n 은 자연수) 은

$3,\ -2,\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2}$ 이 반복됨을 알 수 있다.

$\therefore\ f(4n+k)=f(k)$

(단, n 은 0 이상의 정수, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$)

그러므로 $f(1998)=f(4\times 499+2)=f(2)=-2$

9. 일대일 함수 $x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$ 에서 음이 아닌 정수 n 에 대하여 함수 $f(x)$ 가 $f(0) = 0,\ f(10n + k) = f(n) + k(k = 0,\ 1,\ \cdots,\ 9)$ 를 만족할 때, $f(1994)$ 의 값은?

① 11　② 15　③ 23　④ 26　⑤ 29

해설

$$\begin{aligned} f(1994) &= f(10 \cdot 199 + 4) = f(199) + 4 \\ &= f(10 \cdot 19 + 9) + 4 = f(19) + 9 + 4 \\ &= f(10 \cdot 1 + 9) + 13 = f(1) + 9 + 13 \\ &= f(10 \cdot 0 + 1) + 22 = f(0) + 1 + 22 \\ &= 0 + 1 + 22 = 23 \end{aligned}$$

10. 다항식 $f(x)$ 가 임의의 실수 x, y에 대하여 $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$, $f(1) = 1$ 을 만족시킬 때, $f(0) + f(2)$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

임의의 실수에 대하여

$f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$를 만족하므로

$x = 1$, $y = 1$ 을 준식에 대입하면

$1 = 1 \cdot 1 = f(1)f(1) = f(2) + f(0)$

$\therefore f(0) + f(2) = 1$

11. $0 \le x \le 1$ 일 때 $f(x) = x(1-x)$이고 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1) = \frac{1}{2}f(x)$를 만족하는 함수 $f(x)$가 있다. 이 때 $f\left(\frac{5}{2}\right)$의 값은?

① $-\frac{3}{16}$ ② $-\frac{1}{16}$ ③ $\frac{1}{16}$ ④ $\frac{3}{16}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

해설

$$f(x+1) = \frac{1}{2}f(x) \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}f(x-1)$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$$

12. 자연수의 집합을 N, 양의 유리수 집합을 Q^{+} 라고 할 때, 함수 f가 $f\ :Q^{+}\ \rightarrow\ N\times N$으로 정의될 때, 다음 중 일대일 대응인 것은? (단, p, q는 서로소)

① $f\left(\frac{p}{q}\right)=(p,\ 0)$

② $f\left(\frac{p}{q}\right)=(0,\ q)$

③ $f\left(\frac{p}{q}\right)=(p+q,\ 0)$

④ $f\left(\frac{p}{q}\right)=(0,\ pq)$

⑤ $f\left(\frac{p}{q}\right)=(p,\ q)$

해설

① $\frac{2}{3}\neq\frac{2}{5}$ 일 때

$f\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(\frac{2}{5}\right)=(2.\ 0)$

②, ③, ④도 같은 방법으로

일대일 대응이 아님을 보일 수 있다.

13. 실수 x, y에 대하여 $f(xy) = f(x)f(y)$ 이고 f가 일대일대응일 때, $f(0)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

0이 아닌 x에 대하여 $y = 0$을
$f(xy) = f(x)f(y)$ 에 대입하자.
$f(0) = f(x)f(0) \Leftrightarrow f(0) - f(0)f(x) = 0$
$\Leftrightarrow f(0)[1 - f(x)] = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$ 또는 $f(x) = 1$
만일 $f(x) = 1$이면
$f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(2) = 1$,$\cdots$ 이다.
위는 $f(x)$가 일대일대응이라는 것과 모순이므로
$f(x) = 1$은 부적당
$\therefore f(0) = 0$

14. $X = \{x \mid -1 \le x \le 2\}$, $Y = \{y \mid 0 \le y \le 3\}$ 일 때 함수 $f : X \to Y, y = ax + b(a < 0)$ 가 일대일 대응이 되는상수 a, b 의 값의 합은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$f(x) = ax + b$ 는 $a < 0$ 이므로 감소함수이다.

$\therefore\ x = -1$ 일 때, $f(x)$ 는 최대이고

$-a + b = 3$

$x = 2$ 일 때 $f(x)$ 는 최소이며

$2a + b = 0$ 두 식을 연립하면 $a = -1, b = 2$

$\therefore\ a + b = 1$

15. 집합 $X=\{1,2,3\}$, $Y=\{a,b,c\}$, $Z=\{4,5,6\}$에 대하여 일대일대응인 함수 $f : X \to Y$와 함수 $g : Y \to Z$가 $f(1)=a$, $g(c)=6$, $(g\circ f)(2)=4$를 만족시킬 때, $f(3)$의 값은 얼마인가?

① a　　② b　　③ c

④ $b,\ c$　　⑤ $a,\ b,\ c$

해설

$f(x)$가 일대일대응이므로
$f(2)=b$ 또는 $f(2)=c$이어야 한다.
(i) $f(2)=b$인 경우 $f(1)=a$이므로 $f(3)=c$
(ii) $f(2)=c$인 경우 $g(c)=6$이므로
$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(c)=6$
그런데 문제의 조건에서
$(g\circ f)(2)=4$이므로 모순이다.
따라서, (i), (ii)에 의하여 $f(3)=c$이다.

해설

f와 g가 일대일대응이면
$g\circ f$도 일대일대응이다.
$(g\circ f)(2)=4$에서
$g(f(2))=4$이므로 $f(2)\neq c$
또, $f(1)=a$이고 f가 일대일대응이므로
$f(2)=b$이어야 한다.
$\therefore f(3)=c$

16. 집합 $X=\{-1,\ 1,\ 3\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 $f(x)=-x+k$ 가 일대일 대응일 때, 상수 k 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(-1)=1+k$

$f(1)=-1+k$

$f(3)=-3+k$

이때, 함수 f 가 일대일 대응이므로 공역과 치역이 일치한다.

$\therefore X=\{1+k,\ -1+k,\ -3+k\}$

그런데 $-3+k<-1+k<1+k$ 이므로

$X=\{-1,\ 1,\ 3\}$ 에서

$-3+k=-1,\ -1+k=1,\ 1+k=3$

$\therefore k=2$

17. $X=\{x\mid -1\le x\le 2\}$, $Y=\{y\mid -2\le y\le 2\}$ 에서 $f: X\to Y$, $f(x)=ax+b(a>0)$ 로 정의되는 함수 f 가 일대일대응일 때, $\frac{a}{b}$ 의 값은?

① -2 ② 2 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ -1

해설

일대일 대응이고 $a>0$ 이므로

$f(-1)=-2\quad f(2)=2$

$\therefore\ -a+b=-2,\quad 2a+b=2$

$\Rightarrow\quad a=\frac{4}{3}\quad b=-\frac{2}{3}$

$\Rightarrow\quad \frac{a}{b}=-2$

18. 집합 $X = \{x|x$는 자연수$\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 함수 f 는 상수함수이다. $f(2) = 2$ 일 때, $f(1) + f(3) + f(5) + \cdots + f(19)$ 의 값은 얼마인가?

① 100 ② 50 ③ 38 ④ 20 ⑤ 10

해설

$f(x)$ 가 상수함수이므로,

$f(1) = F(3) = \cdots = F(19) = 2$

$\therefore f(1) + f(3) + \cdots + f(19) = 2 \cdot 10 = 20$

19. 다음 중 항등함수를 찾으면?

① $f(x) = x$ ② $f(x) = x + 1$ ③ $f(x) = x - 1$

④ $f(x) = x^2$ ⑤ $f(x) = x^2 + 1$

해설

항등함수는 $f(x) = x$ 또는 $y = x$ 이다.

20. 실수전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 f 는 항등함수이고 $g(x) = -3$(x 는 실수) 일 때, $f(2) + g(4)$ 의 값은?

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

f 는 항등함수이므로 $f(x) = x$

$\therefore\ f(2) = 2$

모든 실수 x 에 대하여

$g(x) = -3$ 이므로 g 는 상수함수이다.

$\therefore\ g(4) = -3$

$\therefore\ f(2) + g(4) = 2 + (-3) = -1$ 이다.

21. 다음 보기의 함수 중 일대일 대응인 것은 몇 개인가?

보기

㉠ $f(x) = 2x + 1$　　㉡ $g(x) = x^2$

㉢ $h(x) = -x$　　㉣ $k(x) = |x|$

① 4 개　② 3 개　③ 2 개　④ 1 개　⑤ 없다

해설

이 문제는 그래프를 그려서 판단하는 것이 좋다.
하나의 요령은 어떤 함수가 일대일 대응일 경우는
그래프를 그려보면 오직 증가만 하든지
또는 감소만 하는 형태의 그래프가 나타난다.
일대일 대응은 뒤에 역함수에서 활용된다.
(즉, 역함수가 존재하는 함수는 일대일 대응뿐이다.)
㉠은 증가만 하는 일대일 대응,
㉢은 감소만 하는 일대일 대응.
답은 2 개

22. 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 에서 집합 $B = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5\}$ 로의 대응 f 중 $f(1) = a_1,\ f(2) = a_2$ 인 함수 f 의 개수는?

① 8 개 ② 25 개 ③ 64 개

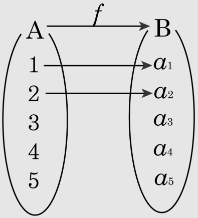
④ 81 개 ⑤ 125 개

해설

$f(1) = a_1,\ f(2) = a_2$ 인 함수

$f : A \rightarrow B$ 는 다음 그림에서 A 의 원소 3, 4, 5 에 B 의 원소 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ 중 하나를 각각 대응시키면 된다.

따라서, 구하는 함수의 개수는 $5 \times 5 \times 5 = 125$ (개)



23. 두 집합 $X=\{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 중 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

> X 의 임의의 두 원소 $x_1,\ x_2$ 에 대하여
> Ⅰ.$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$
> Ⅱ.$f(x_1)=f(x_2)$ 이면 $x_1=x_2$

① 2 개　② 4 개　③ 6 개　④ 8 개　⑤ 12 개

해설

조건 Ⅰ 에서, $x_1=0,\ x_2=0$ 이면
$f(0)=f(0)+f(0)$ 에서 $f(0)=0$
$x_1=1,\ x_2=-1$ 이면
$f(0)=f(1)+f(-1)$ 에서, $f(-1)=-f(1)$
이때, 조건 Ⅱ 에 의해
$f(1)\neq 0,\ f(-1)\neq 0$
따라서, 두 조건을 만족시키는
함수 f 의 개수는 0 이 대응 할 수 있는
원소는 0 의 1 가지,
1 이 대응할 수 있는 원소는
$-2,\ -1,\ 1,\ 2$ 의 4 가지,
-1 이 대응할 수 있는 원소는 $-f(1)$ 의 1 가지,
따라서, $1\times 4\times 1=4$ (개)

24. 집합 $\mathrm{A} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $\mathrm{B} = \{-1,\ 0,\ 1\}$ 에 대하여 함수 $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ 를 정의할 때, $f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) = 0$ 인 함수 f 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 211 개

해설

$f(1),\ f(2),\ f(3),\ f(4),\ f(5)$ 이들 중
적어도 하나는 0 이므로,
전체 함수의 개수에서
$f(1)f(2)f(3)f(4)f(5) \neq 0$ 인
함수의 개수를 빼면 된다.
그러므로 $3^5 - 2^5 = 211$