

1. $x = -2 - i$ 일 때, $x^2 + 4x + 10$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x = -2 - i$ 에서 $x + 2 = -i$ 의 양변을 제곱하면

$$(x + 2)^2 = (-i)^2 \text{ 이므로}$$

$$x^2 + 4x = -5$$

$$\therefore x^2 + 4x + 10 = -5 + 10 = 5$$

2. 포물선 $x = y^2 + 1$ 위의 점 (a, b) 와 직선 $x - y + 1 = 0$ 사이의 거리가 최소가 될 때, $4(a + b)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

(a, b) 가 포물선 $x = y^2 + 1$ 위의 점이고,
또 점 (a, b) 와 직선 사이의 거리를 l 이라 하면,

$$a = b^2 + 1 \dots\dots \textcircled{㉠}$$

$$l = \frac{|a - b + 1|}{\sqrt{2}} \dots \textcircled{㉡}$$

㉠를 ㉡에 대입하면

$$l = \frac{|b^2 - b + 2|}{\sqrt{2}} = \frac{\left| \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \right|}{\sqrt{2}}$$

$\therefore b = \frac{1}{2}$ 일 때 l 이 최소가 된다.

따라서 $a + b = \frac{5}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{4}$ 이므로

$$\therefore 4(a + b) = 7$$

3. 원 $x^2 + y^2 - 4x - 6y - c = 0$ 이 y 축과 만나고 x 축과는 만나지 않을 때, 정수 c 의 개수는?

① 2 개

② 3 개

③ 4 개

④ 5 개

⑤ 6 개

해설

원의 방정식

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - c = 0$$

을 표준형으로 바꾸면

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = c + 13 \text{ 이므로}$$

중심이 $(2, 3)$ 반지름의 길이가 $\sqrt{c + 13}$

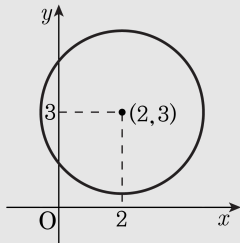
인 원이 된다.

다음 그림과 같이 y 축과는 만나고,

x 축과는 만나지 않으므로

$$2 \leq \sqrt{c + 13} < 3 \text{ 에서 } -9 \leq c < -4$$

$\therefore$ 정수 c 의 개수는 $-9, -8, -7, -6, -5$ 의 5 개



4. 중심이 원점이고, 직선 $2x - y + 5 = 0$ 에 접하는 원의 반지름의 길이는?

① 1

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt{3}$

④ 2

⑤ $\sqrt{5}$

해설

원의 반지름의 길이 r 는 원의 중심 $(0, 0)$ 과
직선 $2x - y + 5 = 0$ 사이의 거리와 같으므로

$$r = \frac{|0 + 0 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \sqrt{5}$$

5. 직선 $3x + y - 5 = 0$ 을 x 축 방향으로 1만큼, y 축 방향으로 n 만큼 평행이동하면 직선 $3x + y - 1 = 0$ 이 된다. 이 때, n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

x 축 방향으로 1, y 축 방향으로 n 만큼 평행이동하므로
직선 $3x + y - 5 = 0$ 에 x 대신 $x - 1$, y 대신 $y - n$ 을 대입하면

$$3(x - 1) + (y - n) - 5 = 0$$

$$3x + y - n - 8 = 0 \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

$\textcircled{7}$ 이 $3x + y - 1 = 0$ 과 일치하므로 $-n - 8 = -1 \therefore n = -7$

6. 원 $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$ 을 점 (2, 1) 에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은?

① $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 4$

② $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$

③ $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$

④ $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$

⑤ $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 1$

해설

원 $x^2 + y^2 - 6x + 8 = 0$ 은 중심이 (3, 0) 이고
반지름의 길이가 1인 원이다.

원의 중심 (3, 0) 을 점 (2, 1) 에 대하여
대칭이동한 점을 (a, b) 라 하면

$$\frac{3+a}{2} = 2, \frac{0+b}{2} = 1$$

$$\therefore a = 1, b = 2$$

원을 대칭이동하여도 반지름의 길이는
그대로이므로 구하는 원은 중심이 (1, 2) 이고
반지름의 길이가 1인 원이다.

$$\therefore (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$$

7. 다음 중 인수분해가 잘못된 것을 고르면?

① $(x-y)^2 - xy(y-x) = (x-y)(x-y+xy)$

② $3a^2 - 27b^2 = 3(a+3b)(a-3b)$

③ $64a^3 - 125 = (4a+5)(16a^2 - 20a + 25)$

④ $(x^2 - x)(x^2 - x + 1) - 6 = (x^2 - x + 3)(x+1)(x-2)$

⑤ $2x^2 - 5x + 3 = (x-1)(2x-3)$

해설

$$\begin{aligned} & 64a^3 - 125 \\ &= (4a)^3 - (5)^3 \\ &= (4a-5)(16a^2 + 20a + 25) \end{aligned}$$

8. $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$ 를 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x^2+cx+d)$ 이다. $a+b+c-d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 10

해설

$x^2 + x = A$ 로 치환하면

$$\begin{aligned} & (x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24 \\ &= \{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+24 \\ &= (x^2+x-2)(x^2+x-12)+24 \\ &= (A-2)(A-12)+24 \\ &= A^2-14A+48=(A-6)(A-8) \\ &= (x^2+x-6)(x^2+x-8) \\ &= (x-2)(x+3)(x^2+x-8) \\ \therefore a+b+c-d &= -2+3+1-(-8)=10 \end{aligned}$$

9. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^n = 1$ 을 만족하는 최소의 자연수 n 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $n = 4$

해설

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2i}{2} = -i \text{ 에서}$$

$$n = 1 \text{ 일 때, } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^1 = -i$$

$$n = 2 \text{ 일 때, } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 = (-i)^2 = -1$$

$$n = 3 \text{ 일 때, } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3 = (-i)^3 = i$$

$$n = 4 \text{ 일 때, } \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4 = (-i)^4 = 1$$

따라서 조건을 만족하는 최소의 자연수는 4이다.

10. x 에 대한 두 이차방정식

$$x^2 - 2\sqrt{b}x + (2a + 1) = 0 \cdots \textcircled{㉠}$$

$x^2 - 2ax - b = 0 \cdots \textcircled{㉡}$ 가 있다. ㉠이 서로 다른 두 실근을 가질 때, ㉡의 근을 판별하면? (단, a, b 는 실수이고, $b \geq 0$)

- ① 서로 다른 두 실근을 가진다.
- ② 중근을 가진다.
- ③ 서로 다른 두 허근을 가진다.
- ④ 판별할 수 없다.
- ⑤ 한 개의 실근과 한 개의 허근을 가진다.

해설

㉠의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = b - (2a + 1) > 0 \therefore b > 2a + 1$$

㉡의 판별식을 D' 이라 하면

$$\begin{aligned}\frac{D'}{4} &= a^2 + b > a^2 + 2a + 1 \\ &= (a + 1)^2 \geq 0\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{D'}{4} > 0$$

따라서, ㉡은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

11. 다음은 좌표평면 위의 서로 다른 네 점 A, B, C, D에 대한 설명이다.

㉠ 점 A와 점 B는 x 축 위에 있다.

㉡ 점 B의 x 좌표는 점 A의 x 좌표보다 크다.

㉢ $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = \overline{AD} = \overline{CD}$

점 A, B, C, D의 x 좌표를 각각 a, b, c, d 라 할 때, 옳은 것은?

① $a < d < c < b$

② $c < a < d < b$

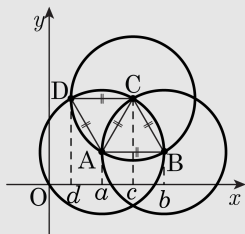
③ $c < d < a < b$

④ $d < a < c < b$

⑤ $d < c < a < b$

해설

그림에서 알 수 있듯이 점 A, B, C, D에 대하여 각각의 x 좌표 a, b, c, d 의 크기는 $d < a < c < b$



12. 세 점 A(2, 2), B(4, 6), C(0, 1)과 좌표평면 위의 임의의 점 P에 대해 $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$ 의 최솟값과 최솟값일 때의 점 P의 좌표를 구하면?

① 61, (0, 0)

② 12, (2, 3)

③ 12, (3, 3)

④ 22, (2, 3)

⑤ 25, (3, 3)

해설

P = (x, y)라 하면

$$\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$$

$$= (x-2)^2 + (y-2)^2 + (x-4)^2 + (y-6)^2 + x^2$$

$$+ (y-1)^2 = 3(x-2)^2 + 3(y-3)^2 + 22$$

∴ 최솟값은 P가 (2, 3)일 때 22이다.

13. 점 $P(0, a)$ 에서 직선 $y = \frac{4}{3}x + 2$ 까지의 거리와 점 P 에서 x 축 까지의 거리가 같을 때, 음수 a 의 값은?

① $-\frac{3}{4}$

② -9

③ $-\frac{4}{9}$

④ -3

⑤ -2

해설

점 $P(0, a)$ 와 직선 $4x - 3y + 6 = 0$ 간의 거리는 $\frac{|-3a + 6|}{5}$ 이고,

점 $P(0, a)$ 와 x 축간의 거리는 y 좌표의 절대값인 $|a|$ 이므로,

$$|-3a + 6| = 5|a|, \quad -3a + 6 = \pm 5a$$

$$\therefore a = \frac{3}{4} \text{ 또는 } -3$$

$$\therefore a = -3 \quad (\because a < 0)$$

14. 점 $(3, 4)$ 에서 직선 $2x - y + k = 0$ 까지의 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 양수 k 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k = 3$

해설

$$\frac{|2 \times 3 - 4 + k|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5} \text{ 이므로 } |2 + k| = 5 \text{ 이다.}$$

따라서 $k = 3$ ($\because k$ 는 양수)

15. 두 점 A(3,4), B(2,5) 가 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭일 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 1

② 2

③ -1

④ 3

⑤ 0

해설

중점이 $y = ax + b$ 위의 점이므로,

$$\frac{9}{2} = a \cdot \frac{5}{2} + b \rightarrow 5a + 2b = 9$$

선분 AB 와 $y = ax + b$ 는 서로 수직이므로,

$$\text{선분 AB 의 기울기} : \frac{4-5}{3-2} = -1$$

따라서, $a = 1$

$$5 \cdot 1 + 2b = 9$$

$$\therefore 2b = 4 \quad \therefore b = 2$$

$$\therefore a + b = 1 + 2 = 3$$

16. 6보다 작은 두 양수 x, y 에 대하여 세 수 3, x, y 가 삼각형의 세 변의 길이가 될 때, 자연수 x, y 의 순서쌍 (x, y) 의 개수를 구하여라.

▶ 답 :

개

▶ 정답 : 16개

해설

x, y 는 6보다 작은 양수이므로
 $0 < x < 6, 0 < y < 6 \dots \dots \textcircled{㉠}$

세 수 3, x, y 가 삼각형의 세 변의 길이가 되려면 다음 부등식을 모두 만족해야 한다.

$$x + y > 3, x + 3 > y, y + 3 > x \dots \dots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 동시에 만족하는 영역은 다음 그림의 색칠된 부분과 같다.

이때, 경계선은 제외한다.

따라서, 영역 안에 있는 자연수 x, y 의 값은

$$x = 1 \text{ 일 때, } y = 3$$

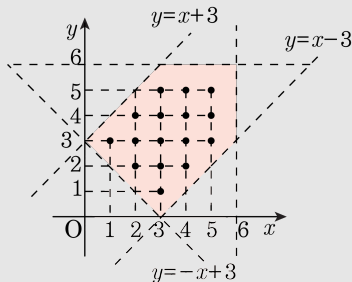
$$x = 2 \text{ 일 때, } y = 2, 3, 4$$

$$x = 3 \text{ 일 때, } y = 1, 2, 3, 4, 5$$

$$x = 4 \text{ 일 때, } y = 2, 3, 4, 5$$

$$x = 5 \text{ 일 때, } y = 3, 4, 5 \text{ 이므로}$$

$$\text{순서쌍 } (x, y) \text{의 개수는 } 1 + 3 + 5 + 4 + 3 = 16(\text{개})$$



17. $x^2 + x - 1 = 0$ 일 때, $x^5 - 5x$ 의 값을 구하면?

① 2

② 1

③ 0

④ -1

⑤ -3

해설

$x^5 - 5x$ 를 $x^2 + x - 1$ 로 나누면

즉, $x^5 - 5x = (x^2 + x - 1) \times \text{몫} - 3$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$\therefore x^5 - 5x = -3$$

해설

다음과 같이 식의 차수를 낮춰 나갈 수 있다.

$$x^2 = -x + 1$$

$$x^5 - 5x = (x^2)^2 \times x - 5x$$

$$= x(-x + 1)^2 - 5x$$

$$= x^3 - 2x^2 - 4x$$

$$= x(-x + 1) - 2(-x + 1) - 4x$$

$$= -x^2 - x - 2$$

$$= -(x^2 + x) - 2$$

$$= -1 - 2 = -3$$

18. $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + 2(ac + bd)$ 를 바르게 인수분해 한 것은?

① $(a + b - c - d)(a - b + c + d)$

② $(a + b + c + d)(a - b + c - d)$

③ $(a + b + c - d)(a - b + c + d)$

④ $(a - b + c - d)(a - b + c + d)$

⑤ $(a + b + c + d)(a - b - c + d)$

해설

$$\begin{aligned} & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 + 2(ac + bd) \\ &= (a^2 + 2ac + c^2) - (b^2 - 2bd + d^2) \\ &= (a + c)^2 - (b - d)^2 \\ &= (a + b + c - d)(a - b + c + d) \end{aligned}$$

19. $a^2 - 3a + 1 = 0$ 일 때, $a^2 - 2a + \frac{3}{a^2 + 1}$ 의 값은?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$a^2 - 3a + 1 = 0$ 에서

$$a^2 - 2a + \frac{3}{a^2 + 1} = a - 1 + \frac{3}{3a} = a + \frac{1}{a} - 1$$

한편, $a^2 - 3a + 1 = 0$ 의 양변을 a 로 나누면

$$a - 3 + \frac{1}{a} = 0 \quad \therefore a + \frac{1}{a} = 3$$

$$\therefore (\text{준식}) = \left(a + \frac{1}{a}\right) - 1 = 2$$

20. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4 + ax^3 + bx^2 + 14x + 15 = 0$ 의 한근이 $1 + 2i$ 일 때, 두 실수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

한 근이 $1 + 2i$ 이면 $x = 1 + 2i$, $x^2 = -3 + 4i$, $x^3 = -11 - 2i$, $x^4 = -7 - 24i$,

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + 14x + 15$$

$$= (-7 - 24i) + a(-11 - 2i) + b(-3 + 4i) + 14(1 + 2i) + 15 = 0,$$

$$(-11a - 3b - 7 + 14 + 15) + (-24 - 2a + 4b + 28)i$$

$$\therefore 11a + 3b = 22, -2a + 4b = -4$$

연립하여 풀면 $a = 2, b = 0$

해설

$$x = 1 + 2i \text{에서 } x^2 - 2x + 5 = 0$$

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + 14x + 15 = (x^2 - 2x + 5)(x^2 + kx + 3)$$

좌변을 전개하여 우변과 계수비교하면

$$a = k - 2, b = 8 - 2k, 14 = 5k - 6$$

$$\therefore k = 4, a = 2, b = 0$$

21. $x^2 + ax + b = 0$, $x^2 + bx + a = 0$ 이 단 한 개의 공통근을 가진다.
 $-1 \leq a \leq 0$ 일 때 $a^2 + b^2$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값을 구하면?

① $\frac{3}{2}$

② 2

③ $\frac{5}{2}$

④ 3

⑤ $\frac{9}{2}$

해설

공통근을 α 라 하면

$$\alpha^2 + a\alpha + b = 0 \cdots ①$$

$$\alpha^2 + b\alpha + a = 0 \cdots ②$$

$$① - ② : (a - b)(\alpha - 1) = 0 \text{에서}$$

$$a \neq b \text{이므로 } \alpha = 1$$

$$1 + a + b = 0 \text{에서 } b = -a - 1$$

$$a^2 + b^2 = a^2 + (-a - 1)^2 = 2a^2 + 2a + 1$$

$$= 2 \left(a + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2}$$

$$-1 \leq a \leq 0 \text{이므로 } M = 1, m = \frac{1}{2}$$

22. <보기> x 에 대한 부등식 $ax^2 + 4ax + 5a > 0$ 의 설명으로 옳은 것은 모두 고른 것은?

보기

- ㉠ $a > 0$ 일 때 해는 모든 실수이다.
㉡ $a = 0$ 일 때 해는 $x = 0$ 뿐이다.
㉢ $a < 0$ 일 때 해는 없다.

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢

⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$ax^2 + 4ax + 5a > 0$ 에서

$a(x^2 + 4x + 5) > 0$, $a\{(x+2)^2 + 1\} > 0$

㉠ $a > 0$ 일 때 $(x+2)^2 + 1 > 0 \therefore$ 모든 실수

㉡ $a = 0$ 일 때 $0 \cdot \{(x+2)^2 + 1\} > 0 \therefore$ 해는 없다.

㉢ $a < 0$ 일 때 $(x+2)^2 + 1 < 0 \therefore$ 해는 없다.

23. 부등식 $|x^2 + x + 1| \leq |x + 2|$ 의 해는?

① $x \leq -1$

② $-1 \leq x \leq 1$

③ $x \geq 1$

④ 해는 없다.

⑤ 모든 실수

해설

$$x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ 이므로}$$

$$|x^2 + x + 1| = x^2 + x + 1$$

$$x^2 + x + 1 \leq |x + 2| \text{에서}$$

(i) $x < -2$ 일 때,

$$x^2 + x + 1 \leq -(x + 2), \quad x^2 + 2x + 3 \leq 0$$

$$(x + 1)^2 + 2 \leq 0$$

그런데 $(x + 1)^2 > 0$ 이므로 해는 없다.

(ii) $x \geq -2$ 일 때,

$$x^2 + x + 1 \leq x + 2, \quad x^2 \leq 1$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 1$$

(i), (ii)에 의해 $\therefore -1 \leq x \leq 1$

24. 어느 회사가 판매하고 있는 상품의 1개당 판매 가격을 작년보다 $x\%$ 올리면 이 상품의 판매량이 작년보다 $\frac{x}{2}\%$ 감소한다고 한다. 이 회사가 올해 판매 금액의 10% 를 상여금으로 지급할 때, 올해 판매 금액에서 상여금을 제외한 금액이 작년 판매 금액보다 크거나 같게 되기 위한 x 의 최댓값은?

- ① 60 ② $\frac{200}{3}$ ③ $\frac{230}{3}$ ④ 80 ⑤ 90

해설

이 회사가 판매하는 상품의 작년 1개당
판매 가격을 a , 판매량을 b 라 하자.

올해 판매 가격을 $x\%$ 올리면

올해 판매 가격은 $a\left(1 + \frac{x}{100}\right)$,

판매량은 $b\left(1 - \frac{x}{200}\right)$ 이므로

올해 판매 금액에서 상여금을 제외한 금액은

$$a\left(1 + \frac{x}{100}\right) \times b\left(1 - \frac{x}{200}\right) \times \frac{9}{10}$$

작년 판매 금액이 ab 이므로

$$a\left(1 + \frac{x}{100}\right) \times b\left(1 - \frac{x}{200}\right) \times \frac{9}{10} \geq ab$$

이 부등식을 정리하면

$$9x^2 - 900x + 20000 \leq 0$$

$$(3x - 100)(3x - 200) \leq 0$$

$$\therefore \frac{100}{3} \leq x \leq \frac{200}{3}$$

25. $x^2 + y^2 \leq 1$ 를 만족하는 모든 (x, y) 가 $y \leq x^2 + k$ 를 만족하도록 하는 실수 k 의 최솟값은?

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

$x^2 + y^2 \leq 1$ 를 만족하는 모든 (x, y) 가 $y \leq x^2 + k$ 를 만족하도록 하려면 다음 그림과 같이 포물선의 아랫부분에 원이 포함되어야 한다.

따라서 $k \geq 1$ 일 때 이므로 실수 k 의 최솟값은 1 이다.

