1. 다음 보기의 운동 경기 중 구기 종목이 모임을 집합 A 라고 할 때, $n(A)$ 를 구하여라.

보기

농구, 씨름, 양궁, 축구, 육상, 수영, 사이클, 유도, 레슬링, 복싱, 야구

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

구기 종목은 농구, 축구, 야구인 세 종목이다.
따라서 $n(A) = 3$ 이다.

2. 다음 중 틀린 것은?

① $\{1, 2\} \subset \left\{x \mid x\text{는 5보다 작은 자연수}\right\}$

② $\{0, 2, 4\} \subset \{2, 4, 6, 8\}$

③ $\phi \subset \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

④ $\{1, 3, 6\} \subset \left\{x | x\text{는 12의 약수}\right\}$

⑤ $\{1, 3, 7\} \not\subset \{0, 1, 3, 5\}$

해설

② $\{0,\ 2,\ 4\}$ 가 $\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$의 부분집합이 아니므로 $\{0,\ 2,\ 4\} \not\subset \{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$

3. 집합 $A = \{0,\ 1,\ 2\}$ 일 때, 집합 A 의 부분집합이 아닌 것은?

① $\{0\}$ ② $\{\varnothing\}$ ③ $\varnothing$
④ $\{0,\ 2\}$ ⑤ $\{0,\ 1,\ 2\}$

해설

집합 A 의 부분집합 : $\varnothing$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{0,\ 1\}$, $\{0,\ 2\}$, $\{1,\ 2\}$, $\{0,\ 1,\ 2\}$

4. $A = \{a,\ b,\ c\}$ 일 때, 집합 A 의 부분집합의 개수를 써라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 8 개

해설

집합 A 의 부분집합 : $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,\ b\}$, $\{a,\ c\}$, $\{b,\ c\}$, $\{a,\ b,\ c\}$
따라서 집합 A 의 부분집합의 개수는 8 개이다.

5. 세 집합 $A,\ B,\ C$ 에 대하여 다음 중 옳은 것으로만 짝지어 진 것은?

㉠ $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

㉡ $A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

㉢ $A - B = A \cap B^c$

㉣ $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$

① ㉠, ㉡　② ㉠, ㉢　③ ㉡, ㉢

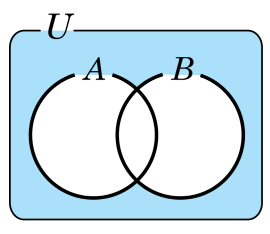
④ ㉡, ㉣　⑤ ㉢, ㉣

해설

㉡ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

㉣ $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

6. 다음 벤 다이어그램에서 $n(U) = 30$, $n(A) = 20$, $n(B) = 15$, $n(A \cap B) = 10$ 일 때, 색칠한 부분의 원소의 개수를 구하여라.



▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 5개

해설

색칠한 부분이 나타내는 집합은 $(A \cup B)^C$ 이다.

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 20 + 15 - 10 \\ &= 25 \end{aligned}$$

따라서 $n((A \cup B)^C) = n(U) - n(A \cup B) = 30 - 25 = 5$ 이다.

7. 다음 중 집합 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ 를 조건제시법으로 나타낸 것으로 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $\{x \mid x$는 9 이하의 홀수$\}$

② $\{x \mid x$는 10 이하의 홀수$\}$

③ $\{x \mid x$는 11 미만의 홀수$\}$

④ $\{x \mid x$는 9보다 작은 홀수$\}$

⑤ $\{x \mid x$는 9 이하의 자연수 중 2로 나누었을 때 나머지가 1 인 수 $\}$

해설

④ $\{1, 3, 5, 7\}$

8. 다음 중 $A \subset B$인 관계인 것은?

① $A = \{x \mid x$는 6의 약수$\}$, $B = \{x \mid x$는 12의 약수$\}$

② $A = \{x \mid x$는 홀수$\}$, $B = \{3, 5, 7, 9\}$

③ $A = \{x \mid x$는 5보다 작은 자연수$\}$, $B = \{1, 2, 4\}$

④ $A = \{x \mid x$는 1의 배수$\}$, $B = \{x \mid x$는 3의 배수$\}$

⑤ $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$

해설

① $A \subset B$
② $B \subset A$
③ $B \subset A$
④ $B \subset A$
⑤ 포함 관계가 없다.

9. 두 집합 $A = \{b,\ c\}$, $B = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$ 에 대하여 $A \subset X \subset B$ 를 만족하는 집합 X 가 될 수 없는 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

① $\{b,\ c\}$ ② $\{a,\ b,\ c\}$ ③ $\{a,\ c,\ e\}$
④ $\{a,\ b,\ f\}$ ⑤ $\{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$

해설

③ $\{b,\ c\} \not\subset \{a,\ c,\ e\}$
④ $\{b,\ c\} \not\subset \{a,\ b,\ f\}$

10. 두 집합 $A = \{1,\ 2,\ a+1\}$, $B = \{1,\ b,\ 7\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 이다. 이때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 8

해설

$A = B$ 이므로 $b = 2$, $a+1 = 7$, $a = 6$

$\therefore\ a+b = 8$

11. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \cap B = B$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $B \subset A$
② $A \subset (A \cup B)$
③ $A \cup B = A$
④ $(A \cap B) \cup B = A$
⑤ $(A \cap B) \subset (A \cup B)$

해설

$A \cap B = B$ 이면 $B \subset A$ 이다.
④ $A \cap B = B$ 이면 $(A \cap B) \cup B = B \cup B = B$ 이므로 옳지 않다.

12. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A) = 28$, $n(B) = 35$, $A \cap B = \varnothing$ 일 때, $n(A \cup B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 63

해설

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$n(A \cup B) = 28 + 35 = 63$

13. 우리 반에서 발야구가 취미인 학생이 17 명, 컴퓨터 게임이 취미인 학생이 18 명이다. 또 , 두 가지 전부 취미인 학생이 7 명이다. 이때, 우리 반 학생 가운데 발야구나 컴퓨터 게임이 취미인 학생은 몇 명인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 명

▷ 정답 : 28 명

해설

발야구가 취미인 학생을 집합 A 라 하고, 컴퓨터 게임이 취미인 학생을 B 라고 하자.
그렇다면 발야구, 컴퓨터 게임 모두 취미인 학생은 $A \cap B$ 가 된다.
발야구나 컴퓨터 게임이 취미인 학생, 즉 $A \cup B$ 를 구하는 것이다.
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
$x = 17 + 18 - 7$
그러므로 x 는 28 이다.

14. 다음 중 항상 참이라고 할 수 없는 것은?

① 자연수 n에 대하여, n^2 이 짝수이면 n도 짝수 이다.

② 자연수 n, m에 대하여 n^2+m^2 이 홀수이면, nm은 짝수이다.

③ 자연수 n에 대하여, n^2 이 3의 배수이면, n은 3의 배수이다.

④ a, b가 실수일 때, $a+b\sqrt{2}=0$ 이면, $a=0$ 이다.

⑤ 두 실수 a, b에 대하여, $a+b>2$ 이면, $a>1$ 또는 $b>1$

해설

①, ③ : n^2 이 p 의 배수이면, n은 p의 배수이다. (참)
②: 대우는 'nm 은 홀수이면 n^2+m^2 이 짝수이다.' nm은 홀수, 즉 n, m 모두 홀수이면 n^2, m^2 모두 홀수이므로 n^2+m^2 은 짝수이다.
∴ 주어진 명제는 참
④ 반례 : $a=2\sqrt{2}, b=-1$
※ 주의) 주어진 명제가 참일 때는 a, b가 유리수라는 조건일 때임을 명심해야 한다.
⑤ 대우 : $a \leqq 1$ 그리고 $b \leqq 1$ 이면 $a+b \leqq 2$ (참)

15. 다음 (가), (나)에 들어갈 말을 알맞게 나열한 것은?

- $|a|=|b|$는 $a=b$이기 위한 (가)조건이다.
- 3의 배수는 6의 배수이기 위한 (나)조건이다.

① 필요, 필요　② 필요, 충분
③ 충분, 충분　④ 충분, 필요
⑤ 충분, 필요충분

해설

$|a|=|b| \underset{\circ}{\overset{\times}{\rightleftarrows}} a=b \therefore$ 필요

$\{x \mid x$는 3의 배수$\} \supset \{x \mid x$는 6의 배수$\} \therefore$ 필요

16. $x > y > 0$인 실수 $x,\ y$에 대하여 $\dfrac{x}{1+x},\ \dfrac{y}{1+y}$의 대소를 비교하면?

① $\dfrac{x}{1+x} < \dfrac{y}{1+y}$　② $\dfrac{x}{1+x} \leq \dfrac{y}{1+y}$　③ $\dfrac{x}{1+x} > \dfrac{y}{1+y}$
④ $\dfrac{x}{1+x} \geq \dfrac{y}{1+y}$　⑤ $\dfrac{x}{1+x} = \dfrac{y}{1+y}$

해설

$A = \dfrac{x}{1+x} - \dfrac{y}{1+y}$ 이라하면

$$A = \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} = \frac{x(1+y) - y(1+x)}{(1+x)(1+y)}$$

$$= \frac{x-y}{(1+x)(1+y)} > 0$$

따라서 $\therefore \dfrac{x}{1+x} > \dfrac{y}{1+y}$

17. 전체집합 $U = \{x \mid x\text{는 50 이하의 양의 짝수}\}$ 에 대하여 세 조건 $p : x$ 는 48 의 약수, $q : 0 < x < 30$, $r : x^2 - 10x + 24 = 0$ 일 때, 'p 이고 q 이고 $\sim r$' 를 만족하는 집합에 속하지 <u>않는</u> 것은?

① 6　　② 8　　③ 12　　④ 16　　⑤ 24

해설

조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 하면
$P = \{2, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$
$Q = \{2, 4, 6, 8, 10, \cdots, 28\}$
$R = \{4, 6\}$
'p 이고 q 이고 $\sim r$' 를 만족하는 집합은 $P \cap Q \cap R^c$ 이므로
$P \cap Q \cap R^c = \{2, 8, 12, 16, 24\}$

18. 다음 명제 중 이가 참인 것은?

① $a > 3$ 이면 $a^2 > 9$ 이다.

② x 가 4 의 배수이면 x 는 짝수이다.

③ $a^2 = ab$ 이면 $a = b$ 이다.

④ $a < b$ 이면 $|a| < |b|$ 이다.

⑤ $x > 0, y > 0$ 이면 $x + y > 0$ 이다.

해설

① $a \leq 3$ 이면 $a^2 \leq 9$ 이다. (거짓)
(반례) $a = -4$
② x 가 4 의 배수가 아니면 x 는 홀수이다. (거짓)
(반례) $x = 6$
③ $a^2 \neq ab$ 이면 $a \neq b$ 이다 (참)
(대우) $a = b$ 이면 $a^2 = ab$ 이다.
④ $a \geq b$ 이면 $|a| \geq |b|$ 이다. (거짓)
(반례) $a = 1,\ b = -2$
⑤ $x \leq 0$ 또는$y \leq 0$ 이면 $x + y \leq 0$ 이다. (거짓)
(반례) $x = -1,\ y = 2$

19. 세 명제 $\sim p \to q, q \to \sim r$ 가 참이고, 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 할 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \subset Q$　② $R \subset Q^c$　③ $R \cup P^c = R$
④ $P \subset R$　⑤ $R \cap Q = R$

해설

$\sim p \to q, q \to \sim r$ 가 참이므로
$\sim p \to q \to \sim r$ 에서 $P^c \subset Q \subset R^c$ 이다.
① $P \not\subset Q$
② $Q \subset R^c$ 이므로 $R \subset Q^c$
③ $P^c \subset R^c$ 이므로 $R \cup P^c \neq R$
④ $P^c \subset R^c$ 이므로 $R \subset P$
⑤ $Q \subset R^c$ 에서 $R \subset Q^c$ 이므로 $R \cap Q \neq R$

20. 자연수 n에 대하여 n^2 이 짝수이면 n도 짝수임을 증명하는 과정이다. 빈 칸 (가), (나), (다) 에 알맞은 것을 차례로 쓰면?

> 주어진 명제의 (가) 을(를) 구하여 보면
> (가) : 'n 이 홀수이면 n^2 도 홀수이다.'
> 이 때, n 이 홀수이므로
> $n =$ (나)(k는 0 또는 자연수)
> 이 때, $n^2 =$ (나)$^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$
> 여기에서 $2(2k^2 + 2k)$ 는 (다) 이므로 n^2 은 홀수이다.
> ∴ (가) 가(이) 참이므로 주어진 명제도 참이다.

① 역, $2k + 1$, 0 또는 짝수
② 이, $2k - 1$, 홀수
③ 대우, $2k + 1$, 0 또는 짝수
④ 대우, $2k - 1$, 0 또는 홀수
⑤ 역, $2k + 1$, 0 또는 홀수

해설

주어진 증명과정은 '명제가 참이면 그 대우도 참이다' 라는 성질을 이용한 것이므로
∴ (가) : 대우
n 이 홀수이므로 ∴ (나) : $2k + 1$
$2(2k^2 + 2k)$ 는 $2 \times$ (정수) 의 형태이므로
∴ (다) : 0 또는 짝수

21. 전체집합 U 의 두 부분집합 $A,\ B$ 에 대하여 $A-(A-B)=A$ 이기 위한 필요충분조건이 아닌 것은?

① $A \subset B$ ② $A^c \subset B^c$ ③ $A-B=\varnothing$

④ $A \cup B = B$ ⑤ $A^c \cap B^c = B^c$

해설

$$\begin{aligned} A-(A-B) &= A \cap (A \cap B^c)^c \\ &= A \cap (A^c \cup B) \\ &= (A \cap A^c) \cup (A \cap B) \\ &= \varnothing \cup (A \cap B) \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

$\therefore\ A \cap B = A$, 즉 $A \subset B$

22. 다음은 $a > 0,\ b > 0$ 일 때, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$ 임을 증명하는 과정이다. 빈 칸 (가), (나), (다)에 들어갈 식 또는 기호가 순서대로 바르게 나열된 것을 고르면?

> $a > 0,\ b > 0$ 일 때, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$
> (증명)
> $\boxed{(가)} - \boxed{(나)}$
> $= (a + 2\sqrt{ab} + b) - (a + b) = 2\sqrt{ab} > 0$
> $\therefore\ (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{a+b})^2$
> 그런데, $\sqrt{a} + \sqrt{b}\ \boxed{(다)}\ 0$,
> $\sqrt{a+b}\ \boxed{(다)}\ 0$ 이므로 $\therefore\ \sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$

① $\sqrt{a} + \sqrt{b},\ \sqrt{a+b},\ <$

② $\sqrt{a} + \sqrt{b},\ \sqrt{a+b},\ >$

③ $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2,\ (\sqrt{a+b})^2,\ <$

④ $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2,\ (\sqrt{a+b})^2,\ >$

⑤ $(\sqrt{a+b})^2,\ (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2,\ >$

해설

양 변을 제곱하여 $a - b > 0$ 이면 $a > b$ 임을 이용한다.

23. 실수 x, y 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $x > y$ 이면, $x^2 > y^2$ 이다.

㉡ $x^2 + y^2 \geq xy$

㉢ $x > y$ 이면 $x^3 > y^3$ 이다.

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠. (반례) $x = 2,\ y = -3$ 일 때, $4 < 9$　$\therefore$ 거짓

㉡. $x^2 + y^2 - xy = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$

$\therefore x^2 + y^2 \geq xy$

$\therefore$ 참

㉢. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

$x - y > 0,\ x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0$

$\therefore x^3 - y^3 > 0,\ x^3 > y^3$

$\therefore$ 참

24. 다음은 $a \geq 0, b \geq 0$ 인 두 실수 a, b에 대하여 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 임을 증명한 것이다. 물음에 답하여라.

> [(가)] - [(나)]
> $= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$
> $= (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}$
> $= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$ [(다)]
> 따라서, [(가)] $\geq$ [(나)]
> 한편, 등호는 [(라)] 일 때 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

① (가) $a+b$ (나) $\sqrt{ab}$ (다) ≥ 0 (라) $a=0, b=0$

② (가) $\frac{a+b}{2}$ (나) $2\sqrt{ab}$ (다) ≤ 0 (라) $a=0, b=0$

③ (가) $\frac{a+b}{2}$ (나) $\sqrt{ab}$ (다) ≥ 0 (라) $a=b$

④ (가) $\sqrt{ab}$ (나) $a+b$ (다) ≥ 0 (라) $a=b$

⑤ (가) $2\sqrt{ab}$ (나) $\frac{a+b}{2}$ (다) ≤ 0 (라) $a=0, b=0$

해설

$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$

$= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$

$= \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2}$

$= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$

$\therefore \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

한편, 등호는 $a=b$ 일 때 성립한다.

25. 집합 $A = \{x \mid x$는 12의 약수$\}$ 일 때, 적어도 하나의 원소가 홀수인 집합 A 의 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 48 개

해설

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 적어도 하나는 홀수인 부분집합의 개수는 모든 부분집합의 개수에서 짝수의 원소로만 이루어진 부분집합의 개수를 빼면 되므로 $2^6 - 2^{6-2} = 64 - 16 = 48$ (개) 이다.

26. 다음 두 조건을 만족하는 집합 A 의 부분집합의 개수를 구하여라.

$A \cap \{4,\ 8,\ 10,\ 12\} = \{4,\ 10\}$
$A \cup \{4,\ 8,\ 10,\ 12\} = \{4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12\}$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 64 개

해설

$A \cap \{4,\ 8,\ 10,\ 12\} = \{4,\ 10\}$ 에서 집합 A 는 원소 4, 10 을 포함하고, 원소 8, 12 는 포함하지 않는다.
또 $A \cup \{4,\ 8,\ 10,\ 12\} = \{4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12\}$ 에서 집합 A 는 원소 5, 6, 9, 11 을 포함한다.
$\therefore\ A = \{4,\ 5,\ 6,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\}$
따라서 집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^6 = 64$ (개) 이다.

27. 두 집합 $A = \{5,\ 2a+1,\ 11\}$, $B = \{6-a,\ 3a-2,\ 13\}$에 대하여 $A \cap B = \{7\}$일 때, $B - A$는?

① $\{5,\ 7,\ 11\}$ ② $\{3,\ 7,\ 13\}$ ③ $\{5,\ 11\}$

④ $\{3,\ 13\}$ ⑤ $\{7\}$

해설

$A - B = \{7\}$이므로 $7 \in A$, $7 \in B$이다.

$2a + 1 = 7 \quad \therefore\ a = 3$

$B = \{6-3,\ 3\times3-2,\ 13\} = \{3,\ 7,\ 13\}$

$B - A = \{3,\ 13\}$