

1. 다음 보기의 운동 경기 중 구기 종목이 모임을 집합 A 라고 할 때, $n(A)$ 를 구하여라.

보기

농구, 씨름, 양궁, 축구, 육상, 수영, 사이클, 유도, 레슬링, 복싱, 야구

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

구기 종목은 농구, 축구, 야구인 세 종목이다.
따라서 $n(A) = 3$ 이다.

2. 다음 중 틀린 것은?

① $\{1, 2\} \subset \{x \mid x \text{는 } 5 \text{보다 작은 자연수}\}$

② $\{0, 2, 4\} \subset \{2, 4, 6, 8\}$

③ $\emptyset \subset \{1, 2, 3, 4\}$

④ $\{1, 3, 6\} \subset \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$

⑤ $\{1, 3, 7\} \not\subset \{0, 1, 3, 5\}$

해설

② $\{0, 2, 4\}$ 가 $\{2, 4, 6, 8\}$ 의 부분집합이 아니므로 $\{0, 2, 4\} \not\subset \{2, 4, 6, 8\}$

3. 집합 $A = \{0, 1, 2\}$ 일 때, 집합 A 의 부분집합이 아닌 것은?

① $\{0\}$

② $\{\emptyset\}$

③ $\emptyset$

④ $\{0, 2\}$

⑤ $\{0, 1, 2\}$

해설

집합 A 의 부분집합 : $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}$

4. $A = \{a, b, c\}$ 일 때, 집합 A 의 부분집합의 개수를 써라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 8 개

해설

집합 A 의 부분집합 : $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$
따라서 집합 A 의 부분집합의 개수는 8개이다.

5. 세 집합 A, B, C 에 대하여 다음 중 옳은 것으로만 짝지어진 것은?

$$\textcircled{\text{㉠}} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$\textcircled{\text{㉡}} A \cap (B \cup C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$\textcircled{\text{㉢}} A - B = A \cap B^c$$

$$\textcircled{\text{㉤}} (A \cup B)^c = A^c \cup B^c$$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉢

③ ㉡, ㉢

④ ㉡, ㉤

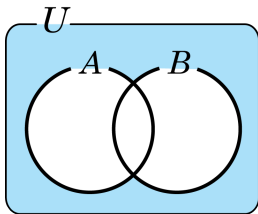
⑤ ㉢, ㉤

해설

$$\textcircled{\text{㉡}} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\textcircled{\text{㉤}} (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

6. 다음 벤 다이어그램에서 $n(U) = 30$, $n(A) = 20$, $n(B) = 15$, $n(A \cap B) = 10$ 일 때, 색칠한 부분의 원소의 개수를 구하여라.



▶ 답 : 개

▷ 정답 : 5 개

해설

색칠한 부분이 나타내는 집합은 $(A \cup B)^C$ 이다.

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\ &= 20 + 15 - 10 \\ &= 25 \end{aligned}$$

따라서 $n((A \cup B)^C) = n(U) - n(A \cup B) = 30 - 25 = 5$ 이다.

7. 다음 중 집합 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ 를 조건제시법으로 나타낸 것으로 옳지 않은 것은?

① $\{x \mid x \text{는 } 9 \text{ 이하의 홀수}\}$

② $\{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 홀수}\}$

③ $\{x \mid x \text{는 } 11 \text{ 미만의 홀수}\}$

④ $\{x \mid x \text{는 } 9 \text{ 보다 작은 홀수}\}$

⑤ $\{x \mid x \text{는 } 9 \text{ 이하의 자연수 중 } 2 \text{로 나누었을 때 나머지가 } 1 \text{ 인 수}\}$

해설

④ $\{1, 3, 5, 7\}$

8. 다음 중 $A \subset B$ 인 관계인 것은?

① $A = \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 약수}\}, B = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$

② $A = \{x \mid x \text{는 홀수}\}, B = \{3, 5, 7, 9\}$

③ $A = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{보다 작은 자연수}\}, B = \{1, 2, 4\}$

④ $A = \{x \mid x \text{는 } 1 \text{의 배수}\}, B = \{x \mid x \text{는 } 3 \text{의 배수}\}$

⑤ $A = \{1, 3, 5, 7\}, B = \{2, 4, 6, 8\}$

해설

① $A \subset B$

② $B \subset A$

③ $B \subset A$

④ $B \subset A$

⑤ 포함 관계가 없다.

9. 두 집합 $A = \{b, c\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$ 에 대하여 $A \subset X \subset B$ 를 만족하는 집합 X 가 될 수 없는 것을 모두 고르면? (정답 2개)

① $\{b, c\}$

② $\{a, b, c\}$

③ $\{a, c, e\}$

④ $\{a, b, f\}$

⑤ $\{a, b, c, d, e\}$

해설

③ $\{b, c\} \not\subset \{a, c, e\}$

④ $\{b, c\} \not\subset \{a, b, f\}$

10. 두 집합 $A = \{1, 2, a+1\}$, $B = \{1, b, 7\}$ 에 대하여 $A \subset B$ 이고, $B \subset A$ 이다. 이때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$A = B \text{ 이므로 } b = 2, a + 1 = 7, a = 6$$

$$\therefore a + b = 8$$

11. 두 집합 A, B 에 대하여 $A \cap B = B$ 일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $B \subset A$

② $A \subset (A \cup B)$

③ $A \cup B = A$

④ $(A \cap B) \cup B = A$

⑤ $(A \cap B) \subset (A \cup B)$

해설

$A \cap B = B$ 이면 $B \subset A$ 이다.

④ $A \cap B = B$ 이면 $(A \cap B) \cup B = B \cup B = B$ 이므로 옳지 않다.

12. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A) = 28$, $n(B) = 35$, $A \cap B = \emptyset$ 일 때, $n(A \cup B)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 63

해설

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B) = 28 + 35 = 63$$

13. 우리 반에서 발야구가 취미인 학생이 17 명, 컴퓨터 게임이 취미인 학생이 18 명이다. 또, 두 가지 전부 취미인 학생이 7 명이다. 이때, 우리 반 학생 가운데 발야구나 컴퓨터 게임이 취미인 학생은 몇 명인지 구하여라.



답 :

명



정답 : 28명

해설

발야구가 취미인 학생을 집합 A 라 하고, 컴퓨터 게임이 취미인 학생을 B 라고 하자.

그렇다면 발야구, 컴퓨터 게임 모두 취미인 학생은 $A \cap B$ 가 된다. 발야구나 컴퓨터 게임이 취미인 학생, 즉 $A \cup B$ 를 구하는 것이다.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$x = 17 + 18 - 7$$

그러므로 x 는 28 이다.

14. 다음 중 항상 참이라고 할 수 없는 것은?

- ① 자연수 n 에 대하여, n^2 이 짝수이면 n 도 짝수이다.
- ② 자연수 n, m 에 대하여 $n^2 + m^2$ 이 홀수이면, nm 은 짝수이다.
- ③ 자연수 n 에 대하여, n^2 이 3의 배수이면, n 은 3의 배수이다.
- ④ a, b 가 실수일 때, $a + b\sqrt{2} = 0$ 이면, $a = 0$ 이다.
- ⑤ 두 실수 a, b 에 대하여, $a + b > 2$ 이면, $a > 1$ 또는 $b > 1$

해설

①, ③ : n^2 이 p 의 배수이면, n 은 p 의 배수이다. (참)

② : 대우는 ‘ nm 은 홀수이면 $n^2 + m^2$ 이 짝수이다.’ nm 은 홀수, 즉 n, m 모두 홀수이면 n^2, m^2 모두 홀수이므로 $n^2 + m^2$ 은 짝수이다.

∴ 주어진 명제는 참

④ 반례 : $a = 2\sqrt{2}, b = -1$

※ 주의) 주어진 명제가 참일 때는 a, b 가 유리수라는 조건일 때임을 명심해야 한다.

⑤ 대우 : $a \leq 1$ 그리고 $b \leq 1$ 이면 $a + b \leq 2$ (참)

15. 다음 (가), (나)에 들어갈 말을 알맞게 나열한 것은?

- $|a| = |b|$ 는 $a = b$ 이기 위한 (가) 조건이다.
- 3의 배수는 6의 배수이기 위한 (나) 조건이다.

① 필요, 필요

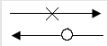
② 필요, 충분

③ 충분, 충분

④ 충분, 필요

⑤ 충분, 필요충분

해설

$|a| = |b|$  $a = b \therefore$ 필요

$\{x \mid x \text{는 } 3 \text{의 배수}\} \supset \{x \mid x \text{는 } 6 \text{의 배수}\} \therefore$ 필요

16. $x > y > 0$ 인 실수 x, y 에 대하여 $\frac{x}{1+x}, \frac{y}{1+y}$ 의 대소를 비교하면?

① $\frac{x}{1+x} < \frac{y}{1+y}$

② $\frac{x}{1+x} \leq \frac{y}{1+y}$

③ $\frac{x}{1+x} > \frac{y}{1+y}$

④ $\frac{x}{1+x} \geq \frac{y}{1+y}$

⑤ $\frac{x}{1+x} = \frac{y}{1+y}$

해설

$$A = \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} \text{ 이라 하면}$$

$$A = \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} = \frac{x(1+y) - y(1+x)}{(1+x)(1+y)}$$

$$= \frac{x-y}{(1+x)(1+y)} > 0$$

$$\text{따라서 } \therefore \frac{x}{1+x} > \frac{y}{1+y}$$

17. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 50 \text{ 이하의 양의 짝수}\}$ 에 대하여 세 조건 $p : x$ 는 48 의 약수, $q : 0 < x < 30$, $r : x^2 - 10x + 24 = 0$ 일 때, ' p 이고 q 이고 $\sim r$ ' 를 만족하는 집합에 속하지 않는 것은?

① 6

② 8

③ 12

④ 16

⑤ 24

해설

조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 하면

$$P = \{2, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$$

$$Q = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots, 28\}$$

$$R = \{4, 6\}$$

' p 이고 q 이고 $\sim r$ ' 를 만족하는 집합은 $P \cap Q \cap R^c$ 이므로

$$P \cap Q \cap R^c = \{2, 8, 12, 16, 24\}$$

18. 다음 명제 중 이가 참인 것은?

① $a > 3$ 이면 $a^2 > 9$ 이다.

② x 가 4 의 배수이면 x 는 짝수이다.

③ $a^2 = ab$ 이면 $a = b$ 이다.

④ $a < b$ 이면 $|a| < |b|$ 이다.

⑤ $x > 0, y > 0$ 이면 $x + y > 0$ 이다.

해설

① $a \leq 3$ 이면 $a^2 \leq 9$ 이다. (거짓)

(반례) $a = -4$

② x 가 4 의 배수가 아니면 x 는 홀수이다. (거짓)

(반례) $x = 6$

③ $a^2 \neq ab$ 이면 $a \neq b$ 이다 (참)

(대우) $a = b$ 이면 $a^2 = ab$ 이다.

④ $a \geq b$ 이면 $|a| \geq |b|$ 이다. (거짓)

(반례) $a = 1, b = -2$

⑤ $x \leq 0$ 또는 $y \leq 0$ 이면 $x + y \leq 0$ 이다. (거짓)

(반례) $x = -1, y = 2$

19. 세 명제 $\sim p \rightarrow q, q \rightarrow \sim r$ 가 참이고, 조건 p, q, r 를 만족하는 집합을 각각 P, Q, R 라 할 때, 다음 중 항상 옳은 것은?

① $P \subset Q$

② $R \subset Q^c$

③ $R \cup P^c = R$

④ $P \subset R$

⑤ $R \cap Q = R$

해설

$\sim p \rightarrow q, q \rightarrow \sim r$ 가 참이므로

$\sim p \rightarrow q \rightarrow \sim r$ 에서 $P^c \subset Q \subset R^c$ 이다.

① $P \not\subset Q$

② $Q \subset R^c$ 이므로 $R \subset Q^c$

③ $P^c \subset R^c$ 이므로 $R \cup P^c \neq R$

④ $P^c \subset R^c$ 이므로 $R \subset P$

⑤ $Q \subset R^c$ 에서 $R \subset Q^c$ 이므로 $R \cap Q \neq R$

20. 자연수 n 에 대하여 n^2 이 짝수이면 n 도 짝수임을 증명하는 과정이다.
빈 칸 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 쓰면?

주어진 명제의 (가)을(를) 구하여 보면

(가): ' n 이 홀수이면 n^2 도 홀수이다.'

이 때, n 이 홀수이므로

$n =$ (나) (k 는 0 또는 자연수)

이 때, $n^2 =$ (나) $^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$

여기에서 $2(2k^2 + 2k)$ 는 (다)이므로 n^2 은 홀수이다.

$\therefore$ (가)가(이) 참이므로 주어진 명제도 참이다.

① 역, $2k + 1$, 0 또는 짝수

② 이, $2k - 1$, 홀수

③ 대우, $2k + 1$, 0 또는 짝수

④ 대우, $2k - 1$, 0 또는 홀수

⑤ 역, $2k + 1$, 0 또는 홀수

해설

주어진 증명과정은 '명제가 참이면 그 대우도 참이다'라는 성질을 이용한 것이므로

$\therefore$ (가): 대우

n 이 홀수이므로 $\therefore$ (나): $2k + 1$

$2(2k^2 + 2k)$ 는 $2 \times$ (정수)의 형태이므로

$\therefore$ (다): 0 또는 짝수

21. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A - (A - B) = A$ 이기 위한 필요충분조건이 아닌 것은?

① $A \subset B$

② $A^c \subset B^c$

③ $A - B = \emptyset$

④ $A \cup B = B$

⑤ $A^c \cap B^c = B^c$

해설

$$\begin{aligned} A - (A - B) &= A \cap (A \cap B^c)^c \\ &= A \cap (A^c \cup B) \\ &= (A \cap A^c) \cup (A \cap B) \\ &= \emptyset \cup (A \cap B) \\ &= A \cap B \end{aligned}$$

$$\therefore A \cap B = A, \text{ 즉 } A \subset B$$

22. 다음은 $a > 0, b > 0$ 일 때, $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$ 임을 증명하는 과정이다.
빈 칸 (가), (나), (다)에 들어갈 식 또는 기호가 순서대로 바르게 나열된
것을 고르면?

$$a > 0, b > 0 \text{ 일 때, } \sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$$

(증명)

$$\boxed{\text{가}} - \boxed{\text{나}}$$

$$= (a + 2\sqrt{ab} + b) - (a + b) = 2\sqrt{ab} > 0$$

$$\therefore (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 > (\sqrt{a+b})^2$$

$$\text{그런데, } \sqrt{a} + \sqrt{b} \boxed{\text{다}} 0,$$

$$\sqrt{a+b} \boxed{\text{다}} 0 \text{ 이므로 } \therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$$

- ① $\sqrt{a} + \sqrt{b}, \sqrt{a+b}, <$
- ② $\sqrt{a} + \sqrt{b}, \sqrt{a+b}, >$
- ③ $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2, (\sqrt{a+b})^2, <$
- ④ $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2, (\sqrt{a+b})^2, >$
- ⑤ $(\sqrt{a+b})^2, (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2, >$

해설

양 변을 제곱하여 $a - b > 0$ 이면 $a > b$ 임을 이용한다.

23. 실수 x, y 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $x > y$ 이면, $x^2 > y^2$ 이다.

㉡ $x^2 + y^2 \geq xy$

㉢ $x > y$ 이면 $x^3 > y^3$ 이다.

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉢, ㉣

④ ㉠, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉣

해설

㉠. (반례) $x = 2, y = -3$ 일 때, $4 < 9 \quad \therefore$ 거짓

㉡. $x^2 + y^2 - xy = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0$

$\therefore x^2 + y^2 \geq xy$

$\therefore$ 참

㉢. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

$x - y > 0, x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0$

$\therefore x^3 - y^3 > 0, x^3 > y^3$

$\therefore$ 참

24. 다음은 $a \geq 0, b \geq 0$ 인 두 실수 a, b 에 대하여 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ 임을 증명한 것이다. 물음에 답하여라.

$$\begin{aligned}
 & [(가)] - [(나)] \\
 &= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} \\
 &= (\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} \\
 &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} [(다)] \\
 &\text{따라서, } [(가)] \geq [(나)] \\
 &\text{한편, 등호는 } [(라)] \text{ 일 때 성립한다.}
 \end{aligned}$$

위의 증명에서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것을 순서대로 적으면?

- ① (가) $a+b$ (나) $\sqrt{ab}$ (다) ≥ 0 (라) $a=0, b=0$
- ② (가) $\frac{a+b}{2}$ (나) $2\sqrt{ab}$ (다) ≤ 0 (라) $a=0, b=0$
- ③ (가) $\frac{a+b}{2}$ (나) $\sqrt{ab}$ (다) ≥ 0 (라) $a=b$
- ④ (가) $\sqrt{ab}$ (나) $a+b$ (다) ≥ 0 (라) $a=b$
- ⑤ (가) $2\sqrt{ab}$ (나) $\frac{a+b}{2}$ (다) ≤ 0 (라) $a=0, b=0$

해설

$$\begin{aligned}
 & \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \\
 &= \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} \\
 &= \frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2} \\
 &= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0 \\
 &\therefore \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}
 \end{aligned}$$

한편, 등호는 $a=b$ 일 때 성립한다.

25. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$ 일 때, 적어도 하나의 원소가 홀수인 집합 A 의 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 48 개

해설

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ 적어도 하나는 홀수인 부분집합의 개수는 모든 부분집합의 개수에서 짝수의 원소로만 이루어진 부분집합의 개수를 빼면 되므로 $2^6 - 2^{6-2} = 64 - 16 = 48$ (개)이다.

26. 다음 두 조건을 만족하는 집합 A 의 부분집합의 개수를 구하여라.

$$A \cap \{4, 8, 10, 12\} = \{4, 10\}$$

$$A \cup \{4, 8, 10, 12\} = \{4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

▶ 답: 개

▷ 정답: 64 개

해설

$A \cap \{4, 8, 10, 12\} = \{4, 10\}$ 에서 집합 A 는 원소 4, 10을 포함하고, 원소 8, 12는 포함하지 않는다.

또 $A \cup \{4, 8, 10, 12\} = \{4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12\}$ 에서 집합 A 는 원소 5, 6, 9, 11을 포함한다.

$$\therefore A = \{4, 5, 6, 9, 10, 11, 12\}$$

따라서 집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^6 = 64$ (개)이다.

27. 두 집합 $A = \{5, 2a + 1, 11\}$, $B = \{6 - a, 3a - 2, 13\}$ 에 대하여 $A \cap B = \{7\}$ 일 때, $B - A$ 는?

① $\{5, 7, 11\}$

② $\{3, 7, 13\}$

③ $\{5, 11\}$

④ $\{3, 13\}$

⑤ $\{7\}$

해설

$A - B = \{7\}$ 이므로 $7 \in A$, $7 \in B$ 이다.

$$2a + 1 = 7 \quad \therefore a = 3$$

$$B = \{6 - 3, 3 \times 3 - 2, 13\} = \{3, 7, 13\}$$

$$B - A = \{3, 13\}$$