

1. 두 집합 $X = \{-2, 0, 1\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ 에 대하여 다음 대응 중 X 에서 Y 로의 함수인 것은?

① $x \rightarrow x + 1$

② $x \rightarrow x^2$

③ $x \rightarrow x - 1$

④ $x \rightarrow x + 2$

⑤ $x \rightarrow 2x + 1$

해설

각각의 치역을 구하면

① $\{-1, 1, 2\}$

② $\{0, 1, 4\}$

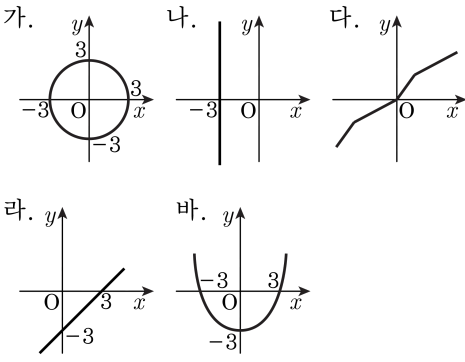
③ $\{-3, -1, 0\}$

④ $\{0, 2, 3\}$

⑤ $\{-3, 1, 3\}$

따라서 주어진 조건을 만족하는 함수는 ④이다.

2. 다음 중 함수의 그래프인 것을 모두 고른 것은?



- ① 가, 나, 다 ② 가, 나, 마 ③ 다, 라, 마
④ 나, 마 ⑤ 가, 마

해설

주어진 x 에 y 값이 하나만 대응되어야 한다.
∴ 다, 라, 마 가 함수이다.

3. 두 집합 $X = \{0, 1, 2\}$, $Y = \{-1, 0, 1, 2\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 가 $f(x) = 2x^2 - 3x$ 일 때, 함수 f 의 치역을 구하면?

① $\{-1, 1\}$

② $\{-1, 0, 1\}$

③ $\{0, 1, 2\}$

④ $\{-1, 0, 2\}$

⑤ $\{-1, 0, 1, 2\}$

해설

$f(x) = 2x^2 - 3x$ 이므로

$f(0) = 0, f(1) = -1, f(2) = 2$

따라서 치역은 $\{-1, 0, 2\}$

4. 집합 $X = \{x \mid -1 \leq x \leq 3\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 일차함수 $f(x) = ax + b$ 의 정의역과 치역이 일치할 때, 두 실수 a 와 b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

- 1) $a > 0$ 일 때 $f(-1) = -1$, $f(3) = 3$ 을 만족
 $-a + b = -1$, $3a + b = 3$
따라서 $a = 1$, $b = 0$
- 2) $a < 0$ 일 때 $f(-1) = 3$, $f(3) = -1$
 $-a + b = 3$, $3a + b = -1$
따라서 $a = -1$, $b = 2$
- 1), 2)에서 $a > 0$ 일 때 $a + b = 1 + 0 = 1$
 $a < 0$ 일 때 $a + b = -1 + 2 = 1$
즉 $a + b = 1$

5. 두 집합 $X = \{x \mid x \text{는 } 100 \text{ 이하의 자연수}\}$, $Y = \{y \mid y \text{는 자연수}\}$ 에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 f 를 $f(x) = (x \text{의 양의 약수의 개수})$ 로 정의할 때, $f(x) = (\text{홀수})$ 를 만족시키는 모든 x 의 개수를 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답 : 10 개

해설

100 이하의 자연수 중에서 약수의 개수가
홀수인 수는 완전제곱수밖에 없다.
즉, $1^2, 2^2, 3^2, \dots, 10^2$ 이다.
따라서 x 의 개수는 10개

6. 자연수 n 에 대하여 $n(n+1)(n+2)$ 의 일의 자리의 숫자를 $f(n)$ 이라 하자. 예를 들어 $f(1) = 6, f(2) = 4$ 이다. 이 때, $f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(20)$ 의 값은 얼마인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 40

해설

$$n = 1 \text{ 이면 } 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \quad \therefore f(1) = 6$$

$$n = 2 \text{ 이면 } 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \quad \therefore f(2) = 4$$

$$n = 3 \text{ 이면 } 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60 \quad \therefore f(3) = 0$$

$$n = 4 \text{ 이면 } 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120 \quad \therefore f(4) = 0$$

$$n = 5 \text{ 이면 } 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210 \quad \therefore f(5) = 0$$

$$n = 6 \text{ 이면 } 6 \cdot 7 \cdot 8 = \times \times 6 \quad \therefore f(6) = 6$$

$$n = 7 \text{ 이면 } 7 \cdot 8 \cdot 9 = \times \times 4 \quad \therefore f(7) = 4$$

$$n = 8 \text{ 이면 } 8 \cdot 9 \cdot 10 = \times \times 0 \quad \therefore f(8) = 0$$

⋮

따라서 6, 4, 0, 0, 0 이 반복하여 나타남을 알 수 있다.

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(20) = (6 + 4 + 0 + 0 + 0) \times 4 = 40$$

7. 자연수 n 을 $n = 2^p \cdot k$ (p 는 음이 아닌 정수, k 는 홀수)로 나타냈을 때, $f(n) = p$ 라 하자. 예를 들면, $f(12) = 2$ 이다. 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

- ㉠ n 이 홀수이면, $f(n) = 0$ 이다.

㉡ $f(8) < f(24)$ 이다.

㉢ $f(n) = 3$ 인 자연수 n 은 무한히 많다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡ ④ ㉠, ㉢ ⑤ ㉡, ㉢

해설

$n = 2^p \cdot k$ 에서
㉠ n 이 홀수이면, k 가 홀수이므로 2^p 이 홀수
 $\therefore p = 0$
즉 $f(n) = 0$
㉡ $f(8) = f(2^3 \cdot 1) = 3$, $f(24) = f(2^3 \cdot 3) = 3$
 $\therefore f(8) = f(24)$
㉢ $f(n) = 3$ 에서 $n = 2^3 \cdot k$
홀수 k 는 무한집합이므로 무한히 많다.

8. 실수 전체의 집합에 대하여 공집합이 아닌 부분집합 X 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = 2x^2 - 10x - 5$, $g(x) = -x^2 + 2x + 10$ 이 서로 같을 때, 집합 X 의 개수는 몇 개인가?

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$f(x) = g(x)$ 이므로
 $2x^2 - 10x - 5 = -x^2 + 2x + 10$ 에서
 $3x^2 - 12x - 15 = 0$, $3(x^2 - 4x - 5) = 0$
 $(x - 5)(x + 1) = 0$
 $\therefore x = 5, -1$
즉, $x = 5$ 또는 $x = -1$ 일 때 $f(x) = g(x)$ 이다.
 $\therefore X = \{-1\}, \{5\}, \{-1, 5\}$

9. 공집합이 아닌 집합 X 를 정의역으로 하는 두 함수 $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $g(x) = -2x + 7$ 에 대하여 두 함수가 서로 같은 함수가 되게 하는 집합 X 의 개수를 구하면?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

$$f(x) = g(x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 3 = -2x + 7$$

$$x^2 = 4$$

$$\therefore x = \pm 2$$

X 는 집합 $\{-2, 2\}$ 의 공집합이 아닌 부분집합이어야 한다.

따라서 구하는 집합의 개수는 $2^2 - 1 = 3$ (개)

10. 다음 함수 중 좌표평면에서 그 그래프가 임의의 직선과 항상 만나는 것은 무엇인가?

① $y = |x|$

② $y = x^2$

③ $y = \sqrt{x}$

④ $y = x^3$

⑤ $y = \frac{1}{x}$

해설

각 함수의 그래프를 그려보거나,
정의역, 치역 관계를 조사해 보면 쉽게 알 수 있다.
 x, y 전체 실수 구간에서 그래프가
그려지는 함수는 $y = x^3$ 뿐이다.

11. 다음 ()안에 알맞은 말을 써라.

함수 $f(x)$ 의 치역과 공역이 같고, 정의역의 서로 다른 원소에 치역의 서로 다른 원소가 대응할 때, 이 함수를 ()이라고 한다.

▶ 답 :

▷ 정답 : 일대일대응



12. 다음 ()안에 알맞은 용어를 써 넣어라.

(1) 함수 $f : X \rightarrow X$ 에서 정의역 X 의 임의의 원소 x 에 대하여 $f(x) = x$ 인 함수를 ()라고 한다.
(2) 함수 $f : X \rightarrow Y$ 에서 정의역 X 의 임의의 원 소 x 가 Y 의 오직 하나의 원소로 대응할 때, 이 함수를 ()라고 한다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 항등함수

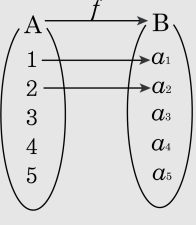
▷ 정답 : 상수함수



14. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에서 집합 $B = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ 로의 대응 f 중 $f(1) = a_1, f(2) = a_2$ 인 함수 f 의 개수는?
- ① 8 개 ② 25 개 ③ 64 개
④ 81 개 ⑤ 125 개

해설

$f(1) = a_1, f(2) = a_2$ 인 함수
 $f : A \rightarrow B$ 는 다음 그림에서 A 의 원소
3, 4, 5 에 B 의 원소 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 중
하나를 각각 대응시키면 된다.
따라서, 구하는 함수의 개수는 $5 \times 5 \times 5 =$
125 (개)



15. 두 함수 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = -3x + 2$ 의 합성함수 $g \circ f$ 를 구하면 무엇인가?

- ① $y = -6x - 1$ ② $y = -6x$ ③ $y = -6x + 1$
④ $y = -6x + 3$ ⑤ $y = -6x + 5$

해설

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = -3(2x + 1) + 2 = -6x - 1$ 이다.

16. 함수 $f(x) = x^2 + x - 2$ 에 대하여 $f(f(1)) + f(f(-2))$ 의 값은?

- ① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$f(x) = (x - 1)(x + 2)$ 에서
 $f(1) = 0, f(-2) = 0, f(0) = -2$ 이고
 $f(f(1)) = f(f(-2)) = f(0)$ 이다.
 $\therefore f(f(1)) + f(f(-2)) = 2f(0) = -4$

17. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = 3x - 2$ 에 대하여 $(f \circ g)(1) = 2$, $(g \circ f)(2) = 3$ 을 만족하는 상수 a , b 의 합 $4a + b$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(f \circ g)(1) = 2$ 에서

$(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(1) = a + b$

$\therefore a + b = 2$

18. 두 함수 $f(x) = ax + b$, $g(x) = ax + c$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하기 위한 필요충분조건은 무엇인가?

- ① $a = 1$ 또는 $b = c$ ② $a = 1$
③ $b = c$ ④ $a = 0$ 또는 $b = c$
⑤ $a = 0$

해설

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(ax + c) \\ &= a(ax + c) + b \\ &= a^2x + ac + b\end{aligned}$$

$$\text{마찬가지로 } (g \circ f)(x) = a^2x + ab + c$$

$$\therefore ac + b = ab + c$$

$$\text{즉, } (a - 1)(b - c) = 0$$

$$\therefore a = 1 \text{ 또는 } b = c$$

19. 함수 $f(x)$ 가 $f(2x+1) = 3x+2$ 를 만족할 때, $f(3)$ 의 값을 구하면?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

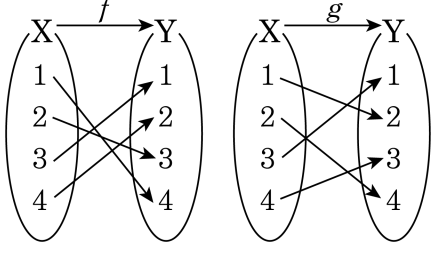
해설

$f(2x+1) = 3x+2$ 에서 $2x+1 = 3$ 이므로

$x = 1$ 을 대입하면

$$f(2 \cdot 1 + 1) = f(3) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$$

20. 두 함수 f, g 가 아래 그림과 같이 정의될 때, $g = h \cdot f$ 를 만족시키는 함수 h 에 대하여 $h(2)$ 의 값은?



- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 4
- ⑤ 5

해설

$g = h \cdot f$ 이고 함수 f 는 일대일대응이므로
역함수가 존재한다.

$$\begin{aligned} &\therefore g \cdot f^{-1} \\ &= (h \cdot f) \cdot f^{-1} = h \cdot (f \cdot f^{-1}) \\ &= h \cdot I = h \\ &\therefore h(2) = (g \cdot f^{-1})(2) \\ &= g(f^{-1}(2)) \\ &= g(4)(\because f^{-1}(2) = 4) \\ &\therefore g(4) = 3 \end{aligned}$$

21. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 f 가 $f : x \rightarrow x + 1$ 로 주어질 때, $f^{2006}(2)$ 의 값은 얼마인가? (단, $f^1 = f$, $f^{n+1} = f \circ f^n$, n 은 자연수)

① 2002 ② 2004 ③ 2006 ④ 2008 ⑤ 2010

해설

$$f^2(x) = f(f(x)) = (x + 1) + 1 = x + 2$$

$$f^3(x) = f(f^2(x)) = (x + 2) + 1 = x + 3$$

$$f^4(x) = f(f^3(x)) = (x + 3) + 1 = x + 4$$

$\vdots$

이상에서 $f^n(x) = x + n$ 이므로

$$f^{2006}(x) = x + 2006$$

$$\therefore f^{2006}(2) = 2 + 2006 = 2008$$

22. 함수 $f(x) = x + 1$ 라 할 때, $f^{10}(2)$ 의 값을 구하여라. (단, $f^2 = f \circ f$, $f^n = f^{n-1} \circ f$)

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

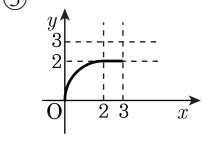
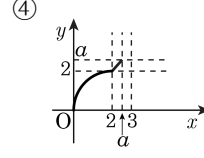
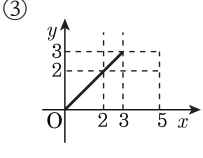
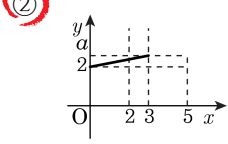
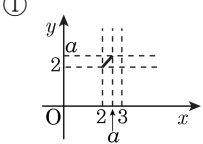
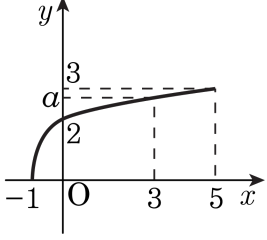
해설

$$\begin{aligned} f^2(x) &= (f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x+1) \\ &= (x+1) + 1 = x+2 \\ f^3(x) &= (f^2 \circ f)(x) = f^2(f(x)) = f^2(x+1) \\ &= (x+1) + 2 = x+3 \\ f^4(x) &= (f^3 \circ f)(x) = f^3(f(x)) = f^3(x+1) \\ &= (x+1) + 3 = x+4 \\ &\quad \dots \end{aligned}$$

$$f^n(x) = x + n$$

$$\therefore f^{10}(2) = 2 + 10 = 12$$

23. 실수 $-1 \leq x \leq 5$ 에서 정의된 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 아래 그림과 같다. 합성함수 $(f \circ f)(x)$ 의 그래프는?

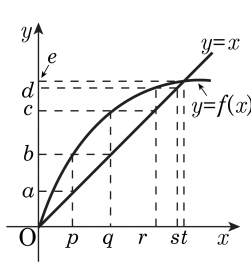


해설

실수 $-1 \leq x \leq 5$ 에서 정의된 함수 $y = f(x)$ 이므로 $(f \circ f)(x)$ 함수는 $f(f(x))$ 에서 $f(x)$ 의 치역을 정의역으로 하는 함수이다. 따라서 합성함수 $(f \circ f)(x)$ 는 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq 3$)가 되고 치역은 $2 \leq y \leq a$ 이다.

24. 림은 $y = f(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프이다. 이를 이용하여 $(f \circ f)(x) = d$ 를 만족시키는 x 의 값은 얼마인가?

- ① p
- ② q
- ③ r
- ④ s
- ⑤ t



해설

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = d \cdots \cdots \textcircled{1}$
 그런데, 주어진 그래프에서 $f(r) = d$ 이므로
 $\textcircled{1}$ 에서 $f(x) = r$
 $\therefore r = c$ 에서 $f(x) = r = c$
 $\therefore x = q$

25. 함수 $f(x) = x^2 - x - 2$, $g(x) = x^2 + ax + 3$ 일 때, 모든 실수에 대하여 $(f \circ g)(x) \geq 0$ 이 되는 실수 a 의 범위는? (단, $f \circ g$ 는 g 와 f 의 합성함수이다.)

- ① $a \leq -3, a \geq 2$
- ② $-1 \leq a \leq 1$
- ③ $a \leq -2, a > 3$
- ④ $-2 \leq a \leq 2$
- ⑤ $-1 \leq a \leq 3$

해설

$g(x) = t$ 라 두면,
 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(t) = t^2 - t - 2 \geq 0$ 에서
 $t \leq -1, t \geq 2$ 에서
(i) $t \leq -1$
 $x^2 + ax + 3 \leq -1$
 $x^2 + ax + 4 \leq 0$ (부적절)
(ii) $t \geq 2$
 $x^2 + ax + 3 \geq 2$
 $x^2 + ax + 1 \geq 0$ 에서
 $D = a^2 - 4 \leq 0$
 $\therefore -2 \leq a \leq 2$