

1. 다음 중 옳지 않은 것은?

① $\{\emptyset\} \subset \emptyset$

② $\{a, b, c\} \subset \{a, b, c, d\}$

③ $A = \{x \mid x \text{는 } 5 \text{보다 작은 자연수}\}$ 이면, $\{1, 2, 3, 4\} \subset A$ 이다.

④ $\{1, 2, 3, 4\} \subset A$ 이고 $A \subset B$ 이면 $\{1, 4\} \subset B$

⑤ $\{4, 5\} \subset \{5, 4\}$

해설

① $\{\emptyset\} \not\subset \emptyset$

2. 세 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 24 \text{의 약수}\}$, $B = \{2, 3, 6, 7, 9\}$, $C = \{x \mid x \text{는 } 30 \text{의 약수}\}$ 에 대하여 $(B \cup C) \cap A$ 의 원소 중에서 가장 큰 원소를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

조건제시법을 원소나열법으로 고쳐보면

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$, $C = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ 이 된다.

먼저 B 와 C 의 합집합을 구해보면 $B \cup C = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 15, 30\}$ 이고 A 와 교집합을 구하면 $(B \cup C) \cap A = \{1, 2, 3, 6\}$ 이다. 따라서 가장 큰 원소는 6이다.

3. 어느 학급의 학생 중 수영반에 들어 있는 학생이 20 명, 배드민턴반에 들어 있는 학생이 18 명, 수영반과 배드민턴반에 모두 들어 있는 학생이 6 명이다. 이때, 수영반이나 배드민턴반에 들어있는 학생은 몇 명인지 구하여라.

▶ 답 : 명

▷ 정답 : 32 명

해설

수영반에 들어 있는 학생을 집합을 A 라 하고, 배드민턴반에 들어 있는 학생을 집합 B 라고 하자.

수영반과 배드민턴반 모두 들어 있는 학생, 즉 $n(A \cap B) = 6$ 이다.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$x = 20 + 18 - 6$$

$$x = 32$$

4. 다음 ()안에 알맞은 말을 쓰시오.

이등변삼각형 ABC는 정삼각형이기 위한 ()조건이다.

▶ 답 : 조건

▷ 정답 : 필요조건

해설

이등변삼각형이 정삼각형을 포함한다.

5. 다음 두 식의 대소를 바르게 비교한 것은?

$$A = 3x^2 - xy + 2y^2$$

$$B = 2x^2 + 3xy - 3y^2$$

① $A < B$

② $A \leq B$

③ $A > B$

④ $A \geq B$

⑤ $A = B$

해설

$$\begin{aligned} A - B &= 3x^2 - xy + 2y^2 - (2x^2 + 3xy - 3y^2) \\ &= x^2 - 4xy + 5y^2 \\ &= x^2 - 4xy + 4y^2 + y^2 \\ &= (x - 2y)^2 + y^2 \geq 0 \end{aligned}$$

따라서 $A - B \geq 0$ 이므로 $A \geq B$

6. 두 집합 $A = \{12, a, b\}$, $B = \{7, 15, b + 5\}$ 에 대하여 $A \subset B$, $B \subset A$ 일 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$b + 5 = 12 \text{ 이므로 } b = 7, a = 15$$

$$\therefore a - b = 15 - 7 = 8$$

7. 두 집합 $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ 에 대하여 $A \cap X = X$ 이고, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수는?

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$A \cap X = X$ 이므로 $X \subset A$

$(A \cap B) \cup X = X$ 이므로

$(A \cap B) \subset X$

$A \cap B = \{2, 4, 6\}$

$\{2, 4, 6\} \subset X \subset \{2, 4, 6, 8, 10\}$

X 는 $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ 의 부분집합 중 원소 2, 4, 6을 포함하는 집합이다.

집합 X 의 개수 : $2^2 = 4$

8. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A^c = \{2, 9, 10\}$, $B^c = \{1, 5, 9, 10\}$, $A \cup B = \{1, 2, 5, 7\}$ 일 때, 집합 B 의 원소의 합은?

① 2

② 5

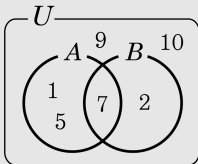
③ 7

④ 9

⑤ 13

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램에 나타내면 다음과 같다.



따라서 $B = \{2, 7\}$ 이므로 집합 B 의 원소의 합은 9이다.

9. 다음 중 거짓인 명제를 모두 고른 것은?

① $xy > x + y > 4$ 이면 $x > 2, y > 2$ 이다.

② $x > 1$ 이면 $x^2 > 1$ 이다.

③ $x + y = 0$ 이면 $x = 0$ 이고 $y = 0$ 이다.

④ $x = 1$ 이면 $x^2 = 1$ 이다.

⑤ $2x + 4 > 0$ 이면 $x > -2$ 이다.

해설

① (반례) $x = 1.5, y = 10$ 이면 $xy > x + y > 4$ 이지만 $x < 2, y > 2$ 이므로 거짓이다.

③ (반례) $x = -1, y = 1$ 이면 $x + y = 0$ 이지만 $x \neq 0, y \neq 0$ 이므로 거짓이다.

10. 두 조건 p, q 를 만족하는 집합을 각각 P, Q 라 할 때, $P = \{a^2, 1\}$, $Q = \{a, 1\}$ 이다. p 가 q 이기 위한 필요충분조건일 때, 상수 a 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ -1 또는 0

⑤ 0 또는 1

해설

p 는 q 이기 위한 필요충분조건이므로

$$P = Q$$

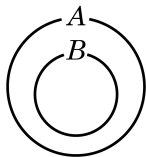
$$\{a^2, 1\} = \{a, 1\}$$

$$a^2 = a \text{ 또는 } a^2 = 1$$

$$a = 0, 1 \text{ 또는 } a = -1, 1$$

이 때, $a = -1$ 이면 $\{1, 1\} = \{-1, 1\}$ 이 되어 모순이므로 a 는 0 또는 1이다.

11. 두 집합 A, B 사이의 관계가 다음 벤 다이어그램과 같고, 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 2\text{의 배수}\}$, $B = \{x \mid x \text{는 } \square \text{의 배수}\}$ 일 때, $\square$ 안에 들어갈 수 있는 수를 모두 고르면?



① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 7

해설

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$$

$$\{4, 8, 12, \dots\} \subset A$$

$$\{8, 16, 24, \dots\} \subset A$$

$$\{10, 20, 30, \dots\} \subset A$$

따라서 ①, ③이다.

12. 전체 집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $(A - B)^c = B - A$ 가 성립할 필요충분조건을 구하면?

① $A \cap B = \emptyset$

② $A \cup B = U$

③ $A \subset B^c$

④ $A^c \cup B = U$

⑤ $A = B^c$

해설

$$(A - B)^c = (A \cap B^c)^c = A^c \cup B, \quad B - A = A^c \cap B$$

에서 $A^c = B$

즉, $A = B^c$

13. x 가 실수일 때, $\frac{x^2 - x + 1}{x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2}$ 의 최댓값은?

① $-\frac{3}{2}$

② $-\frac{1}{2}$

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{3}{2}$

⑤ 2

해설

$$\begin{aligned} & x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 2 \\ &= x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 + 1 \\ &= x^2 \left(x^2 - 2x + 3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right) + 1 \\ &= x^2 \left\{ x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 3 \right\} + 1 \\ &= x^2 \left\{ \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 - 2 \left(x + \frac{1}{x} \right) + 1 \right\} + 1 \end{aligned}$$

$$= x^2 \left(x + \frac{1}{x} - 1 \right)^2 + 1$$

$$= (x^2 - x + 1)^2 + 1$$

$$\therefore \text{준식} = \frac{x^2 - x + 1}{(x^2 - x + 1)^2 + 1} \text{이고}$$

$$x^2 - x + 1 = \left(x^2 - x + \frac{1}{4} \right) + \frac{3}{4}$$

$$= \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \text{이므로}$$

$$x^2 - x + 1 = t \text{로 치환 } t \geq \frac{3}{4} \text{하면}$$

$$\text{준식} : \frac{t}{t^2 + 1} = \frac{1}{\frac{t^2 + 1}{t}} = \frac{1}{t + \frac{1}{t}}$$

$$\text{여기서 } t + \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} = 2$$

$$(\because t \geq \frac{3}{4})$$

$$\text{따라서 } \frac{t^{-1} + 1}{t} \text{의 최솟값은 } 2 \text{이고}$$

$$\frac{t}{t^2 + 1} \text{의 최댓값은 } \frac{1}{2} \text{이다.}$$

14. 집합 $B = \{-1, 0, 1, 2\}$ 의 부분집합의 열을 $B_1, B_2, B_3, \dots, B_{16}$ 이라 하고, B_1 의 원소의 총합을 a_1 , B_2 의 원소의 총합을 $a_2, \dots, B_{16}$ 의 원소의 총합을 a_{16} 이라 할 때, $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{16}$ 의 값은?

- ① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

해설

집합 $B = \{-1, 0, 1, 2\}$ 의 부분집합의 개수는 모두 16개인데 실제로 나열해 보지 않고서도 해결할 수 있다.

즉, -1 을 반드시 포함하는 경우의 집합은 8개

0 을 반드시 포함하는 경우의 집합은 8개

1 을 반드시 포함하는 경우의 집합은 8개

2 를 반드시 포함하는 경우의 집합은 8개이므로 원소의 총합은

$$8(-1 + 0 + 1 + 2) = 16$$

15. 집합 X, Y 에 대하여 연산 $\star$ 를 $X\star Y = (X \cup Y) - (X \cap Y)$ 로 정의하고, 세 집합 A, B, C 가 $n(A \cup B \cup C) = 45$, $n(A\star B) = 18$, $n(B\star C) = 22$, $n(C\star A) = 24$ 를 만족할 때, $n(A \cap B \cap C)$ 의 값을 구하면?

① 10

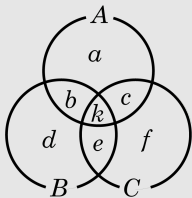
② 11

③ 12

④ 13

⑤ 14

해설



$$n(A \cap B \cap C) = k$$

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= a + b + c + d + e + f + k \\ &= 45 \dots \textcircled{\text{㉠}} \end{aligned}$$

$$n(A\star B) = a + c + d + e = 18 \dots \textcircled{\text{㉡}}$$

$$n(B\star C) = b + d + c + f = 22 \dots \textcircled{\text{㉢}}$$

$$n(C\star A) = a + b + e + f = 24 \dots \textcircled{\text{㉣}}$$

$$\textcircled{\text{㉡}} + \textcircled{\text{㉢}} + \textcircled{\text{㉣}} = 2(a + b + c + d + e + f) = 64$$

$$\therefore a + b + c + d + e + f = 32 \dots \textcircled{\text{㉤}}$$

$$\textcircled{\text{㉤}} \text{을 } \textcircled{\text{㉠}} \text{에 대입하면 } \therefore k = 13$$