

1. 사차방정식 $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3 = 0$ 의 모든 해의 총합은?

① $-2\sqrt{2}i$

② $\sqrt{2}i$

③ -2

④ -1

⑤ 1

해설

$$(\text{준식}) = (x-1)(x+1)(x^2+2x+3) = 0$$

$$\text{실근의 합은 } 1 + (-1) = 0$$

$$\text{허근의 합은 } -2$$

$$\text{모든 근의 합은 } -2$$

2. 모든 실수 x, y 에 대하여 $\sqrt{mx^2 - mx + 2}$ 가 0이 아닌 실수가 될 실수 m 의 값의 범위는?

① $0 < m < 4$

② $4 \leq m \leq 8$

③ $0 \leq m < 8$

④ $4 < m \leq 8$

⑤ $m \geq 8$

해설

$\sqrt{mx^2 - mx + 2}$ 가 0이 아닌 실수가 되려면 $mx^2 - mx + 2 > 0$ 이어야 한다.

i) $m = 0$ 일 때 $0 \cdot x^2 - 0 \cdot x + 2 > 0$ 이므로
모든 실수 x 에 대하여 항상 성립한다.

ii) $m \neq 0$ 일 때 $mx^2 - mx + 2 > 0$ 가
모든 실수 x 에 대하여 항상 성립하려면
 $m > 0 \dots \textcircled{\Gamma}$

또 이차방정식 $mx^2 - mx + 2 = 0$ 의 판별식을
 D 라 할 때

$$D = (-m)^2 - 8m < 0, \quad m(m - 8) < 0$$

$$\therefore 0 < m < 8 \dots \textcircled{\Delta}$$

$\textcircled{\Gamma}, \textcircled{\Delta}$ 의 공통 범위를 구하면 $0 < m < 8$

i), ii)에서 $0 \leq m < 8$

3. 두 직선 $x + y - 4 = 0$, $2x - y + 1 = 0$ 의 교점과 점 $(2, -1)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y = ax + b$ 이다. ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : $ab = -28$

해설

$$\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 2x - y + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{을 연립하면}$$

교점 : $(1, 3) \Rightarrow (1, 3), (2, -1)$ 을 지나는 직선

$$y = \frac{-1 - 3}{2 - 1}(x - 1) + 3$$

$$\Rightarrow y = -4x + 7$$

$$\therefore a = -4, b = 7$$

$$\therefore ab = -28$$

4. 복소수 $z = a + bi$ 를 좌표평면 위의 점 $P(a, b)$ 에 대응시킬 때, $(2 - 3i)z$ 가 실수가 되게 하는 점 P 가 그리는 도형은? (단, a, b 는 실수, $i = \sqrt{-1}$)

① 원

② 아래로 볼록한 포물선

③ 위로 볼록한 포물선

④ 기울기가 음인 직선

⑤ 기울기가 양인 직선

해설

$$\begin{aligned}(2 - 3i)z &= (2 - 3i)(a + bi) \\ &= (2a + 3b) + (2b - 3a)i \cdots \textcircled{7}\end{aligned}$$

⑦ 이 실수하려면 $2b = 3a$

$$\therefore b = \frac{3}{2}a$$

따라서, 기울기가 양인 직선이다.

5. 평행이동 $f : (x, y) \rightarrow (x + 1, y - 2)$ 에 의하여 점(3, 3)은 어느 점에서 옮겨진 것인가?

① (0, 0)

② (3, 3)

③ (1, -2)

④ (-1, 2)

⑤ (2, 5)

해설

평행이동 f 는 x 축의 방향으로 +1, y 축의 방향으로 -2만큼 평행 이동하는 변환이므로 $(a+1, b-2) = (3, 3)$ 따라서 $a = 2, b = 5$

6. 다항식 $(x-1)(x-3)(x+2)(x+4)+21$ 를 인수분해 하면?

① $(x^2 - x - 5)(x^2 + x - 9)$

② $(x^2 - x - 5)(x^2 - x - 9)$

③ $(x^2 + x + 5)(x^2 + x + 9)$

④ $(x^2 + x - 5)(x^2 + x - 9)$

⑤ $(x^2 - x + 5)(x^2 + x + 9)$

해설

$$(\text{준식}) = (x-1)(x+2)(x-3)(x+4) + 21$$

$$= (x^2 + x - 2)(x^2 + x - 12) + 21$$

$x^2 + x = A$ 로 치환하면,

$$(A-2)(A-12) + 21 = A^2 - 14A + 45$$

$$= (A-9)(A-5)$$

$$\therefore (x^2 + x - 9)(x^2 + x - 5)$$

7. $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$ 을 인수분해하면?

① $-(a-b)(b-c)(c-a)$

② $(a-b)(b-c)(a-c)$

③ $-(b-a)(b-c)(c-a)$

④ $(a-b)(b-c)(c-a)$

⑤ $(a-b)(b-c)(c+a)$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (c-b)a^2 + (b^2 - c^2)a + bc(c-b) \\&= (c-b)\{a^2 - (c+b)a + bc\} \\&= (c-b)(a-b)(a-c) \\&= (a-b)(b-c)(c-a)\end{aligned}$$

8. 복소수 $z = a + bi$ (단, a, b 는 실수)와 그 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 대하여 $z + \bar{z} = 4$, $z\bar{z} = 5$ 일 때, $a^2 - b^2$ 의 값은?

① -3

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 3

해설

$$z + \bar{z} = 2a = 4, \quad a = 2$$

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 = 5, \quad b^2 = 1$$

$$\therefore a^2 - b^2 = 4 - 1 = 3$$

9. 방정식 $\sqrt{x^2 + 4x + 4} - |x - 4| < 0$ 의 해를 구하면?

① $x < -1$

② $x > -1$

③ $x < 0$

④ $x < 1$

⑤ $x > 1$

해설

$$|x + 2| - |x - 4| < 0$$

㉠ $x < -2$

$$-(x + 2) + (x - 4) < 0$$

$$0 \cdot x - 6 < 0 \text{ 항상 성립}$$

$$\therefore x < -2$$

㉡ $-2 \leq x < 4$

$$(x + 2) + (x - 4) < 0, x < 1$$

$$\therefore -2 \leq x < 1$$

㉢ $x \geq 4$

$$x + 2 - x + 4 < 0 \text{ 해가 없다.}$$

㉠, ㉡, ㉢에 의해 $\therefore x < 1$

10. 두 원 $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$), $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$ 가 외접할 때, r 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 원 $x^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$), $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$ 의 중심 사이의 거리 $d = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$

두 원이 외접하면 $r + 2 = 5$ 이므로 $r = 3$

11. $i(x+i)^3$ 이 실수일 때, 실수 x 의 값으로 옳지 않은 것을 모두 고르면?

① 0

② $\sqrt{3}$

③ $-\sqrt{3}$

④ 1

⑤ -1

해설

$$\begin{aligned} i(x+i)^3 &= i(x^3 + 3x^2i - 3x - i) \\ &= (-3x^2 + 1) + (x^3 - 3x)i \end{aligned}$$

실수가 되기 위해서는 허수부가 0

$$\therefore x^3 - 3x = 0$$

$$x(x^2 - 3) = 0$$

$$\therefore x = 0, \pm\sqrt{3}$$

12. 2년 전의 A 와 B 의 임금은 서로 같았으나 그 해 A 의 임금은 8% 인상되었고, 작년에는 다시 47% 인상되었다. 반면 B 의 임금은 2년 전과 작년의 임금 인상률이 모두 $a\%$ 로 일정했다. 두 사람의 올해 임금이 서로 같을 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

2년 전 두 사람의 임금을 k 원이라면
올해 A 와 B 의 임금은 각각

$$A : k(1 + 0.08)(1 + 0.47)$$

$$B : k \left(1 + \frac{a}{100}\right)^2$$

따라서

$$(100 + a)^2 = 108 \times 147 = 3 \times 3 \times 6 \times 6 \times 7 \times 7$$

$$\therefore 100 + a = 126$$

$$\therefore a = 26$$

13. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ 위의 점에서 직선 $4x - 3y + 5 = 0$ 에 이르는 거리의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

최댓값은 원 중심에서 직선까지 거리 더하기 반지름이고, 최솟값은 원 중심에서 직선까지 거리 빼기 반지름이다.

원의 방정식 : $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$

$$\Rightarrow \text{최대} : \frac{|4 \times 1 - 3 \times (-2) + 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} + 2 = 5$$

$$\Rightarrow \text{최소} : \frac{|4 \times 1 - 3 \times (-2) + 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} - 2 = 1$$

$\therefore \text{최댓값} + \text{최솟값} = 6$

14. 다음 중 $\left(\frac{997}{1000}\right)^3 + \left(\frac{3}{1000}\right)^3 - 1$ 의 값과 같은 것은?

① $\frac{3^2 \times 997^3}{10}$

② $\frac{3^2 \times 997^6}{10}$

③ $-\frac{3^2 \times 997^3}{10}$

④ $-\frac{3^2 \times 997}{10^6}$

⑤ $-\frac{3^2 \times 997^9}{10}$

해설

주어진 식에서 $\frac{997}{1000}$ 과 $\frac{3}{1000}$ 을 더해보면 $\frac{997+3}{1000} = 1$ 이므로

$a = \frac{997}{1000}$, $b = \frac{3}{1000}$, $c = -1$ 이라 하면

$a + b + c = 0$ 이 된다.

따라서 $a + b + c = 0$ 이므로

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ 에서 $a^3+b^3+c^3 = 3abc$ 임을 이용하면

$$a^3 + b^3 + c^3 = \left(\frac{997}{1000}\right)^3 + \left(\frac{3}{1000}\right)^3 + (-1)^3 \text{의 값은}$$

$$3abc = 3 \times \frac{997}{1000} \times \frac{3}{1000} \times (-1) \text{와 같으므로}$$

구하는 값은

$$3 \times \frac{997}{1000} \times \frac{3}{1000} \times (-1) = -\frac{3^2 \times 997}{10^6}$$

15. 연립부등식 $3y \geq 2x$, $2y \leq 3x$, $y \leq -x + 5$ 를 만족시키는 실수 x , y 에 대하여 $2y - x^2$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $4(M - m)$ 의 값을 구하라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 29

해설

주어진 연립부등식의 영역을 그래프로 나타내면 다음 그림의 색칠한 부분이다.

여기서 $2y - x^2 = k$ 라 하면,

$$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}k \text{ 에서}$$

(i) $y = \frac{3}{2}x$ 에 접할 때, $k = \frac{9}{4}$

(ii) A(3, 2)를 지날 때, $k = -5$

(iii) B(2, 3)를 지날 때, $k = 2$

따라서 최댓값은 $M = \frac{9}{4}$

최솟값은 $m = -5$

$$\therefore M - m = \frac{9}{4} - (-5) = \frac{29}{4}$$

