1. $\frac{5}{1+2i} = x + yi$ 를 만족하는 실수 $x,\ y$ 의 합을 구하여라.(단, $i = \sqrt{-1}$
)

▶ 답 :

▷ 정답 : $x + y = -1$

해설

$\frac{5}{1+2i} = \frac{5(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{5(1-2i)}{5} = 1-2i$

$1-2i = x + yi$

$x = 1, y = -2, x + y = -1$

2. 방정식 $|x| + |x-1| = 2$의 해를 구하시오.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{1}{2}$ 또는 -0.5

▷ 정답 : $\frac{3}{2}$ 또는 1.5

해설

i) $x < 0$일 때,
$-x-(x-1) = 2$이므로 $-2x+1 = 2$
$\therefore\ x = -\frac{1}{2}$
ii) $0 \le x < 1$일 때,
$x-(x-1) = 2$이므로 $0 \cdot x = 1$
$\therefore$ 해가 없다.
iii) $1 \le x$일 때,
$x+x-1 = 2$이므로 $2x = 3$
$\therefore\ x = \frac{3}{2}$
(i), (ii), (iii) 에서 $x = -\frac{1}{2}$ 또는 $x = \frac{3}{2}$

3. 세 점 $A(8,0)$, $B(-4,0)$, $C(0,6)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 의 수심의 좌표를 구하면?

① $(0,-1)$ ② $\left(-1,\frac{5}{2}\right)$ ③ $\left(\frac{3}{2},-1\right)$
④ $(-5,3)$ ⑤ $\left(0,\frac{16}{3}\right)$

해설

삼각형의 세 수선은 한 점에서 만나므로
C에서 $\overline{AB}$에 내린 수선 $\cdots(1)$과
B에서 $\overline{AC}$에 내린 수선 $\cdots(2)$의
교점을 구한다.
$\overline{AB}$의 기울기는 0
$\therefore$ (1)은 $x=0$
$\overline{AC}$의 기울기는 $-\frac{3}{4}$
$\therefore$ (2)는 $y=\frac{4}{3}(x+4)$
두 식을 연립하면 $x=0, y=\frac{16}{3}$

4. 점 A$(-2,\ 3)$ 에서 원 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$에 그은 접선의 접점을 B라 할 때, AB의 길이를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

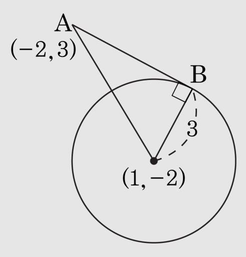
해설

$x^2+y^2-2x+4y-4=0$

$(x-1)^2+(y+2)^2=3^2$

원의 중심은 $(1,\ -2)$, 반지름은 3이므로

$\overline{AB}=\sqrt{(3^2+(-5)^2)-3^2}=5$



5. 평행이동 $f:(x,y)\rightarrow(x+1,y-2)$ 에 의하여 점 $(1,2)$ 가 옮겨진 점의 좌표는?

① $(2,1)$ ② $(2,0)$ ③ $(-2,1)$
④ $(0,4)$ ⑤ $(1,-2)$

해설

$(x,y)\ \rightarrow\ (x+1,y-2)$
$\Rightarrow\ (1,2)\ \rightarrow\ (1+1,2-2)=(2,0)$

6. 두 다항식 $(1+x+x^2+x^3)^3$, $(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$의 x^3의 계수를 각각 a, b라 할 때, $a-b$의 값은?

① 4^3-5^3　② 3^3-3^4　③ 0
④ 1　⑤ -1

해설

두 다항식이 $1+x+x^2+x^3$을 포함하고 있으므로 $1+x+x^2+x^3=A$라 놓으면
$(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$
$=(A+x^4)^3$
$=A^3+3A^2x^4+3Ax^8+x^{12}$
$=A^3+(3A^2+3Ax^4+x^8)x^4$
이 때 $(3A^2+3Ax^4+x^8)x^4$은 x^3항을 포함하고 있지 않으므로 두 다항식의 x^3의 계수는 같다.
$\therefore\ a-b=0$

7. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$에 대하여 $f(x-1) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$일 때, 상수$A \times B \times C$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 66

해설

$$\begin{aligned} f(x-1) &= (x-1)^3 - 3(x-1)^2 + 2(x-1) + 5 \\ &= x^3 + Ax^2 + Bx + C \cdots ㉠ \end{aligned}$$

㉠은 x에 대한 항등식이므로
양변에 $x = 0,\ 1,\ 2$를 차례로 대입하면,
$x = 0$일 때, $-1 = C$
$x = 1$일 때, $5 = 1 + A + B + C$
$x = 2$일 때, $5 = 8 + 4A + 2B + C$
위의 세 식을 연립하여 풀면
$A = -6,\ B = 11,\ C = -1$

8. 두 복소수 $\alpha = a - 2i, \beta = 5 + bi$에 대하여 $\alpha - \overline{\beta} = \overline{3 + 2i}$를 만족하는 실수를 a, b라고 할 때, $a + b$의 값은?

① 2　　② 4　　③ −4　　④ 8　　⑤ −8

해설

$\alpha = a - 2i$

$\overline{\beta} = \overline{5 + bi} = 5 - bi$

$\alpha - \overline{\beta} = a - 2i - (5 - bi) = \overline{3 + 2i}$

$(a - 5) + (b - 2)i = 3 - 2i$

$$\begin{cases} a - 5 = 3 & \therefore \quad a = 8 \\ b - 2 = -2, & \therefore \quad b = 0 \end{cases}$$

9. 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근을 α, β라 한다. $\alpha+\beta$, $\alpha\beta$을 두 근으로 하고, x^2의 계수가 1인 이차방정식이 $x^2+ax+b=0$일 때, $a-b$의 값을 구하시오.

① -1 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

$x^2-2x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 근과계수와의 관계로부터
$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$
2와 -1을 두 근으로 하는 이차방정식은
$x^2-(2-1)x+2\cdot(-1)=0$
$x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x^2+ax+b=0$
$\therefore\ a=-1,\ b=-2$

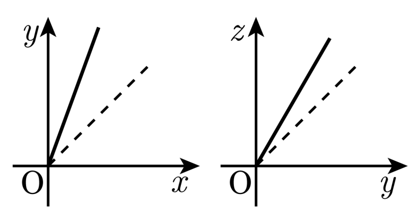
10. 좌표평면 위의 세 점 A(3, 3), B(−3, 0), C(3, 0) 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 + \overline{\mathrm{CP}}^2$ 의 값이 최소가 되는 점을 P(a, b) 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

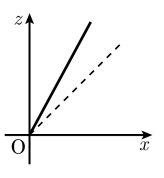
해설

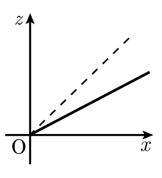
$\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 + \overline{\mathrm{CP}}^2$
$= (a-3)^2 + (b-3)^2 + (a+3)^2 + b^2 + (a-3)^2 + b^2$
$= 3(a^2 + b^2 - 2a - 2b + 12)$
$= 3(a-1)^2 + 3(b-1)^2 + 30$
따라서 $a = 1,\ b = 1$ 일 때, 최솟값 30 을 갖는다.
$\therefore\ a + b = 2$

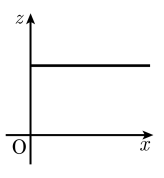
11. 세 변수 x, y, z 에 대하여 아래의 두 그래프(실선)는 각각 x 와 y , y 와 z 사이의 관계를 나타낸 것이다.

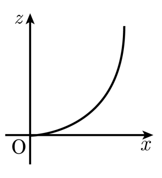


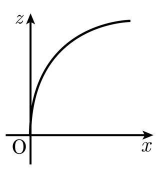
이때, x 와 z 사이의 관계를 그래프로 나타내면? (단, 점선은 원점을 지나고 기울기가 1 인 직선이다.)

①


②


③


④


⑤


해설

주어진 그래프에서 x, y, z 사이의 관계를
식으로 나타내면 $y = ax(a > 1)$, $z = by(b > 1)$
$\therefore\ z = b(ax) = abx\ (ab > 1)$
따라서, $z = abx$ 의 그래프는 보기의 ①과 같다.

12. 서로 다른 두 직선 $2x-ay-2=0,\ x-(a-3)y-3=0$이 평행할 때, 두 직선 사이의 거리를 구하면?

① $\dfrac{\sqrt{6}}{5}$　② $\dfrac{\sqrt{7}}{5}$　③ $\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$　④ $\dfrac{3}{5}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

해설

$\begin{cases} 2x-ay-2=0 \\ x-(a-3)y-3=0 \end{cases}$ 정리하면

$\begin{cases} y=\dfrac{2}{a}x-\dfrac{2}{a} \\ y=\dfrac{1}{a-3}x-\dfrac{3}{a-3} \end{cases}$ 평행하므로

$\dfrac{2}{a}=\dfrac{1}{a-3}$

$\therefore\ a=6$ 대입하면

$\begin{cases} x-3y-1=0 \\ x-3y-3=0 \end{cases}$

$x-3y-1=0$ 위의 점 $(1,\ 0)$ 과 $x-3y-3=0$ 과의 거리는

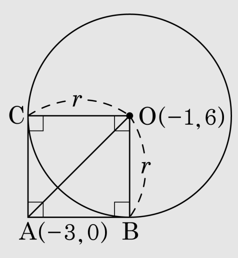
$\therefore\ \dfrac{|1-3|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{10}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

13. 점 A$(-3,\ 0)$에서 원 $(x+1)^2+(y-6)^2=r^2$에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, r의 값은? (단, $r>0$)

① 4　② $3\sqrt{2}$　③ $2\sqrt{5}$　④ $2\sqrt{6}$　⑤ 5

해설

원 $(x+1)^2+(y-6)^2=r^2$은 중심이 O$(-1,\ 6)$이고
반지름의 길이가 $r(r>0)$인 원이다.
점 A에서 이 원에 그은 두 접선이 서로 수직이면 다음 그림과 같이
□ABOC는 한 변의 길이가 r인 정사각형이 된다.



이 때, 두 점 A와 O 사이의 거리가 $r\sqrt{2}$가 되어야 하므로

$$\sqrt{\{-1-(-3)\}^2+(6-0)^2}=r\sqrt{2}$$

$$\sqrt{40}=r\sqrt{2}$$

$$\therefore\ r=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

14. $x^2 + xy - 2y^2 + 2x + 7y + k = f(x, y)$라 할 때, $f(x, y) = 0$이 두 개의 직선을 나타내도록 k의 값을 정하면?

① -5　　② -4　　③ -3　　④ -2　　⑤ -1

해설

$f(x,\ y) = x^2 + (y+2)x - 2y^2 + 7y + k = 0$

주어진 식이 두 개의 직선을 나타내려면

$x,\ y$에 관한 일차식으로 인수분해되어야 하므로

근의 공식에서 근호 안의 식$(= D)$이 완전제곱꼴이어야 한다.

$D = (y+2)^2 - 4(-2y^2 + 7y + k)$

$\quad = 9y^2 - 24y + 4 - 4k \quad \cdots (\text{i})$

(i)이 완전제곱식이어야 하므로

(i)의 판별식

$\dfrac{D}{4} = (-12)^2 - 9(4 - 4k) = 0$

$108 + 36k = 0 \quad \therefore\ k = -3$

15. 이차방정식 $x^2+(k+1)x+2k+1=0$ 의 두 근이 모두 정수일 때, 양수 k 의 값을 구하면?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설

두 근을 $\alpha,\ \beta\ (\alpha \ge \beta)$ 라 하면 근과 계수와의 관계에서

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-(k+1) & \cdots\cdots \text{①} \\ \alpha\beta=2k+1 & \cdots\cdots \text{②} \end{cases}$$

①$\times 2+$②을 하면 $\alpha\beta+2(\alpha+\beta)=-1$

$\alpha\beta+2\alpha+2\beta+4=3, \quad (\alpha+2)(\beta+2)=3$

$\alpha,\ \beta$ 가 정수이므로 $(\alpha+2,\ \beta+2)=(3,\ 1),\ (-1,\ -3)$

$\therefore\ (\alpha,\ \beta)=(1,\ -1),\ (-3,\ -5)$

①에서

$k=-(\alpha+\beta+1)$ 이므로 $k=-1,\ 7$

$k>0$ 이므로 $k=7$