

1. 다음 중 집합인 것을 모두 고르면?

① 우리 반에서 똑똑한 학생의 모임

② 10 이하의 자연수 중에서 1 보다 작은 수의 모임

③ 대한민국에서 키가 가장 큰 사람의 모임

④ 100 이하의 수 중에서 50 에 가까운 수의 모임

⑤ 세계에서 성공한 사람들의 모임

해설

주어진 조건에 알맞은 대상을 분명하게 구별할 수 있어야 하므로
②, ③번만 집합이다.

2. 집합 $A = \{1, 2, 3, 5, 8\}$, $B = \{2, 5, 9, 10\}$, $C = \{2, 3, 5\}$ 일 때, $A \cap (B \cap C)$ 는?

① $\{2, 3\}$

② $\{2, 5\}$

③ $\{2, 3, 5\}$

④ $\{3, 5\}$

⑤ $\{3, 5, 8\}$

해설

$B \cap C = \{2, 5\}$ 이고 A 와의 교집합은 $\{2, 5\}$ 이다.

3. 두 집합 A, B 에 대하여 $n(A) = 7$, $n(B) = 6$, $n(A \cap B) = 2$ 일 때, $n(A \cup B)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

$$\begin{aligned}n(A \cup B) &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) \\&= 7 + 6 - 2 = 11\end{aligned}$$

4. 전체집합 $U = \{a, b, c, d, e\}$ 의 두 부분집합 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, d\}$ 에 대하여 $A^c \cap B^c$ 은?

① $\{a\}$

② $\{a, c\}$

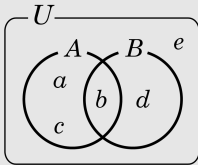
③ $\{b\}$

④ $\{e\}$

⑤ $\{b, e\}$

해설

$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = (\{a, b, c, d\})^c = \{e\}$ 이다.



5. 실수 x, y, z 에 대하여 $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ 일 때 $x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z$ 의 최댓값 M 과 최솟값 m 은?

① $M = 3, m = 0$

② $M = 3, m = -3$

③ $M = 6, m = 0$

④ $M = 6, m = -6$

⑤ $M = 6, m = -12$

해설

x, y, z 가 실수이므로

코시-슈바르츠의 부등식에 의하여

$$\{1 + (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2\} (x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\geq (x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z)^2$$

$$36 \geq (x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z)^2$$

$$-6 \leq x + \sqrt{2}y + \sqrt{3}z \leq 6$$

$$\therefore M = 6, m = -6$$

6. 두 집합 A, B 에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

- ① $A \subset B$ 이면 $n(A) \leq n(B)$ 이다.
- ② $n(A) < n(B)$ 이면 $A \subset B$ 이다.
- ③ $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이면 $n(A) \neq n(B)$ 이다.
- ④ $n(A) = n(B)$ 이면 $A = B$ 이다.
- ⑤ $n(A) = n(B)$ 이면 $A \subset B$ 이다.

해설

- ② 반례 : $A = \{1\}, B = \{2, 3\}$
- ③ $A \subset B$ 이고 $B \subset A$ 이면 $A = B, n(A) = n(B)$ 이다.
- ④ 반례 : $A = \{1, 2\}, B = \{3, 4\}$
- ⑤ 반례 : $A = \{1, 2\}, B = \{3, 4\}$

7. 세 집합 $A = \{x|x\text{는 한국인}\}$, $B = \{x|x\text{는 학생}\}$, $C = \{x|x\text{는 여자}\}$ 에 대하여 한국의 남학생을 나타내는 집합을 모두 고르면?

① $(A \cup B) - C$

② $A \cup B \cup C$

③ $(A \cap B) - C$

④ $A \cap B \cap C^c$

⑤ $(A - B)^c \cap C^c$

해설

한국 학생 중 여학생을 뺀 것 또는 한국 학생 중 여자가 아닌 사람이므로

$(A \cap B) - C$ 또는 $A \cap B \cap C^c$ 이다.

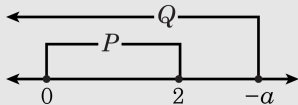
8. 실수 x 에 대한 두 조건 $p : 0 \leq x \leq 2$, $q : x + a \leq 0$ 이 있다. 명제 $p \rightarrow q$ 가 참일 때, a 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : -2

해설

p , q 를 만족하는 집합을 각각 P , Q 라 하면 $p \rightarrow q$ 가 참이므로 $P \subset Q$ 이다. $P = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$, $Q = \{x | x \leq -a\}$



위의 그림에서 $P \subset Q$ 하려면 $2 \leq -a$, $a \leq -2$ 따라서 a 의 최댓값은 -2

9. 두 명제 $p \rightarrow q$ 와 $r \rightarrow \sim q$ 가 모두 참일 때, 다음 명제 중 반드시 참이 되는 것은?

① $q \rightarrow p$

② $r \rightarrow \sim p$

③ $\sim p \rightarrow r$

④ $\sim r \rightarrow \sim p$

⑤ $\sim q \rightarrow r$

해설

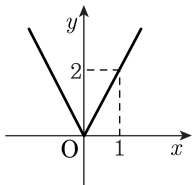
$$p \rightarrow q (T), \sim q \rightarrow \sim p (T), r \rightarrow \sim q (T), q \rightarrow \sim r (T)$$

$$\therefore p \rightarrow q \rightarrow \sim r$$

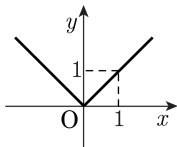
$$\text{따라서 } p \rightarrow \sim r (T), r \rightarrow \sim p (T)$$

10. 다음 중 함수 $y = x + |x|$ 의 그래프는?

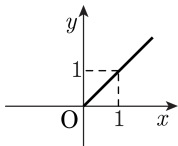
①



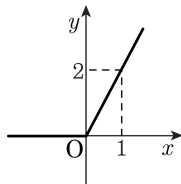
②



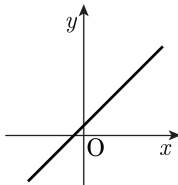
③



④



⑤



해설

$y = x + |x|$ 에서

$x \leq 0$ 일 때 $y = x - x = 0$ 이고

$x > 0$ 일 때 $y = x + x = 2x$ 이다.

따라서 주어진 함수의 그래프는 ④와 같다.

11. 두 집합 $A = \{1, 2, 4, 5, 7\}$, $B = \{x | x \text{는 } 5 \text{ 이하의 홀수}\}$ 에 대하여 $X \cap A = X$ 와 $X \cup (A \cap B) = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 8 개

해설

$$X \cap A = X \text{ 이므로 } X \subset A$$

$$X \cup (A \cap B) = X \text{ 이므로 } (A \cap B) \subset X$$

$$A \cap B = \{1, 5\}$$

$$\{1, 5\} \subset X \subset \{1, 2, 4, 5, 7\}$$

집합 X 는 집합 A 의 부분집합 중 원소 1, 5 를 반드시 포함하는 집합이다.

$$\therefore 2^{5-2} = 2^3 = 8 \text{ (개)}$$

12. 학생 수가 40 명인 어느 학급에서 두 종류의 치약 A , B 를 사용해 본 학생 수를 조사했더니 각각 20명, 30 명이었다. 두 종류의 치약을 모두 사용해 본 학생 수의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값을 구하면?

① 10

② 20

③ 30

④ 40

⑤ 50

해설

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$= 50 - n(A \cap B)$$

$$n(A \cap B) = 50 - n(A \cup B) \cdots \textcircled{7}$$

i) $n(A \cap B)$ 가 최대인 경우는 치약 A 를 사용한 학생이 모두 치약 B 를 사용한 경우이다 $\Rightarrow M = 20$

ii) $n(A \cap B)$ 가 최소인 경우는 $\textcircled{7}$ 에서 $n(A \cup B)$ 가 최대인 경우이다.

$$\Rightarrow n(A \cup B) = 40, n(A \cap B) = 10 = m$$

$$\therefore m + M = 10 + 20 = 30$$

13. $x > 2$ 일 때, $2x - 3 + \frac{1}{x-2}$ 의 최솟값을 a , 그 때의 x 의 값을 b 라 할 때, $a + 2b$ 의 값을 구하면?

① $5 + \sqrt{2}$

② $5 + 2\sqrt{2}$

③ $5 + 3\sqrt{2}$

④ $5 + 4\sqrt{2}$

⑤ $5 + 6\sqrt{2}$

해설

산술평균, 기하평균의 관계에 따라

$$\begin{aligned} 2x - 3 + \frac{1}{x-2} &= 2(x-2) + \frac{1}{x-2} + 1 \\ &\geq 2\sqrt{2(x-2) \times \frac{1}{x-2}} + 1 \\ &\geq 2\sqrt{2} + 1 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 2\sqrt{2} + 1$$

$$2(x-2) = \frac{1}{x-2} \text{ 에서}$$

$$2(x-2)^2 = 1, (x-2)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore x = 2 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$x > 2 \text{ 이므로 } b = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4 + \sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore a + 2b = 2\sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} + 4 = 5 + 3\sqrt{2}$$

14. 임의의 두 집합 X, Y 에 대하여 $X \bullet Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c)$ 라고 정의한다.

전체집합

$U = \{x | x \leq 60, x \text{는 자연수}\}$ 의 세 부분집합 $A = \{x | x \text{는 4의 배수}\}$,
 $B = \{x | x \text{는 6의 배수}\}$, $C = \{x | x \text{는 8의 배수}\}$ 에 대하여 $(A \bullet B) \bullet C$
 의 원소 중 가장 큰 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 54

해설

$$X \bullet Y = (X \cup Y) \cap (X^c \cup Y^c) = (X \cup Y) \cap (X \cap Y)^c = (X \cup Y) - (X \cap Y)$$

$$A = \{x | x \text{는 4의 배수}\}$$

$$= \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, \\ 52, 56, 60\},$$

$$B = \{x | x \text{는 6의 배수}\}$$

$$= \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60\},$$

$$C = \{x | x \text{는 8의 배수}\}$$

$$= \{8, 16, 24, 32, 40, 48, 56\},$$

$$(A \bullet B) \bullet C$$

$$= \{4, 6, 8, 16, 18, 20, 28, 30, 32, 40, 42, 44, 52, 54, \\ 56\} \bullet C$$

$$= \{4, 6, 18, 20, 24, 28, 30, 42, 44, 52, 54\}$$

$$\therefore (A \bullet B) \bullet C \text{ 의 원소 중 가장 큰 값} = 54$$

15. 뚜껑이 없는 직육면체 모양의 물탱크를 만들려고 한다. 물탱크를 만드는 데 드는 비용은 밑면이 8000 원/m^2 이고 옆면은 4000 원/m^2 이다. 밑면의 가로 길이 x 가 4 m , 부피가 36 m^3 인 물탱크를 만들 때, 가장 적은 비용으로 물탱크를 만든다면 그 비용은 얼마인가?

① 240000 원

② 248000 원

③ 256000 원

④ 264000 원

⑤ 272000 원

해설

그림에서 물 탱크의 옆넓이는

$(8 + 2x)y \text{ (m}^2\text{)}$ 이므로

그 비용은 $(8 + 2x)y \cdot 4000 \text{ (원)}$ 이고,

밑넓이는 $4x \text{ (m}^2\text{)}$ 이므로

그 비용은 $4x \cdot 8000 \text{ (원)}$ 이다.

한편, 부피가 36 m^3 이므로 $4xy = 36$

$$\therefore xy = 9$$

따라서, 총비용 p 는

$$p = 4000(8y + 2xy + 8x) = 8000(4x + 4y + 9)$$

$$\geq 8000(2\sqrt{4x \cdot 4y} + 9) = 8000(2 \cdot 12 + 9)$$

$$= 264000 \text{ (원)}$$

따라서, $x = 3$ 일 때,

p 의 최소값은 264000 (원)