1. $x^3-6x^2+11x-6$을 인수분해 하면?

① $(x+1)(x-2)(x+3)$ ② $(x-1)(x+2)(x+3)$
③ $(x-1)(x-2)(x-3)$ ④ $(x+1)(x+2)(x-3)$
⑤ $(x-1)(x-2)(x+3)$

해설

인수정리를 이용하면
$f(1)=0$, $f(2)=0$, $f(3)=0$이므로
(준식)$=(x-1)(x-2)(x-3)$

2. 등식 $\left(\frac{2+i}{1+\sqrt{2}i}\right)\left(\frac{1-4i}{1-\sqrt{2}i}\right)=a+bi$ 를 만족하는 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $a-3b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a-3b=9$

해설

$$(\text{좌변})=\frac{(2+i)(1-4i)}{(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)}$$
$$=\frac{2-8i+i-4i^2}{1-2i^2}$$
$$=\frac{6-7i}{3}=2-\frac{7}{3}i$$ 이므로

$2-\frac{7}{3}i=a+bi$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=2,\ b=-\frac{7}{3}$

$\therefore\ a-3b=2-3\times\left(-\frac{7}{3}\right)=2+7=9$

3. 다음 계산 과정에서 최초로 틀린 부분은?

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} &= \boxed{\text{㉠}}\ \frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{-2}}{\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}} \\
&= \boxed{\text{㉡}}\ \frac{\sqrt{-16}}{\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}} \\
&= \boxed{\text{㉢}}\ \frac{\sqrt{-16}}{2} \\
&= \boxed{\text{㉣}}\ \frac{4i}{2} \\
&= \boxed{\text{㉤}} = \sqrt{-4}
\end{aligned}
$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

$\sqrt{-2}\sqrt{-2} = \sqrt{2}i\sqrt{2}i = 2i^2 = -2$

따라서 최초로 틀린 부분은 ㉢이다.

4. 연립방정식 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \\ x - y = 1 \end{cases}$ 의 해를 순서쌍 (x, y)으로 나타내면?

① $(2, 1)$ ② $(\sqrt{2}+1,\ \sqrt{2})$ ③ $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$
④ $(\sqrt{3}, 1)$ ⑤ $\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

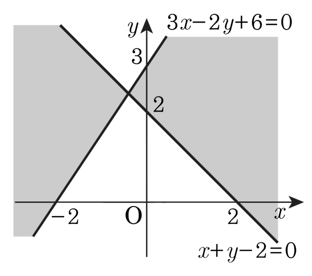
해설

$\begin{cases} x^2 - y^2 = 2 \ \cdots \ ㉠ \\ x - y = 1 \ \cdots \ ㉡ \end{cases}$

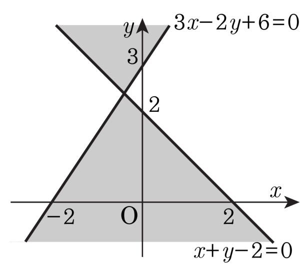
㉡을 $y = x - 1$로 변형하여
㉠에 대입하면
$x^2 - (x-1)^2 = x^2 - x^2 + 2x - 1 = 2$
$2x = 3$
$\therefore\ x = \frac{3}{2},\ y = \frac{1}{2}$

5. 부등식 $(3x-2y+6)(x+y-2) \geq 0$ 의 영역을 좌표평면에 바르게 나타낸 것은?

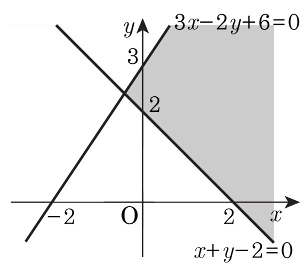
①



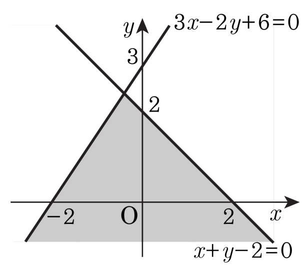
②



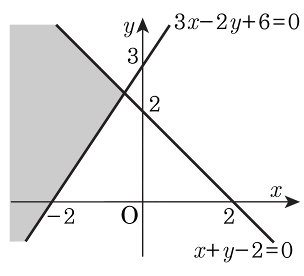
③



④



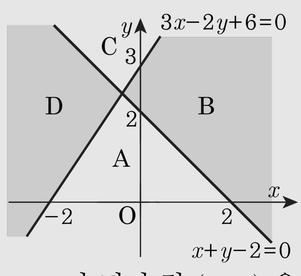
⑤



해설

부등식 $ab > 0$ 은 $a > 0$, $b > 0$ 또는 $a < 0$, $b < 0$ 과 동치이다.
따라서 $a = 3x - 2y + 6$, $b = x + y - 2$ 로 놓으면 부등식을 만족하는 영역은
(ㄱ) $a > 0$, $b > 0$
즉 $a > 0$ 과 $b > 0$ 의 공통부분
(ㄴ) $a < 0$, $b < 0$
즉 $a < 0$ 과 $b < 0$ 의 공통부분의 양쪽 부분이며

이들을 간단히 구하는 데에는 두 직선 $3x-2y+6=0$, $x+y-2=0$ 으로 좌표평면을 다음 그림과 같이 네 부분으로 나누어 본다.



양의 영역, 음의 영역은 서로 교차해서 나타나므로, 원점 (0, 0) 을 부등식에 대입해 보면
$(3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 6)(0 + 0 - 2) = -12 < 0$ 이 되어 점 (0, 0) 은 부등식을 만족하지 않는다.
따라서 영역 A 는 부등식을 만족하지 않으므로 영역 B 는 부등식을 만족하고, 영역 C 는 부등식을 만족하지 않으며, 영역 D 는 부등식을 만족한다.

6. 두 이차함수 $y = x^2 - ax + b$ 와 $y = x^2 - bx + a$ 의 그래프의 교점이 x 축 위에 있도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값은? (단, $a \neq b$)

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

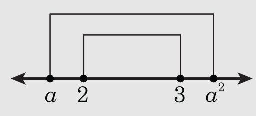
해설

교점의 x 좌표를 p 라 하면
$p^2 - ap + b = p^2 - bp + a$
$(a - b)p + a - b = 0$
$(a - b)(p + 1) = 0$
$a \neq b$ 이므로 $p = -1$
그런데 교점이 x 축 위에 있으므로
교점의 y 좌표는 0 이다.
$\therefore 1 + a + b = 0$
$\therefore a + b = -1$

7. 구간 $[2, 3]$에 속하는 모든 실수 x에 대하여 $x^2 - a(a+1)x + a^3 \le 0$을 만족하는 실수 a의 최솟값과 최댓값의 곱은?(단, $a > 1$)

① 2 ② $2\sqrt{3}$ ③ 3 ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ 5

해설



$[2, 3] \Leftrightarrow 2 \le x \le 3$

$x^2 - a(a+1)x + a^3 \le 0$

$(x-a)(x-a^2) \le 0$

$a < x < a^2 (\because\ a > 1)\quad a \le 2, a^2 \ge 3$

$\therefore\ a$의 최댓값 : 2

a의 최솟값 : $\sqrt{3} \rightarrow \therefore\ 2\sqrt{3}$

8. 두 점 A(1, 3), B(4, 0) 을 지나는 직선에 수직이고 선분 AB 를 1 : 2 로 외분하는 점을 지나는 직선의 방정식을 구하면 $y = ax + b$ 이다. $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = 9$

해설

직선 AB 의 기울기는 $\frac{0-3}{4-1} = -1$ 이므로

직선 AB 에 수직인 직선의 기울기는 1 이다.

또, 선분 AB 를 1 : 2 로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times4-2\times1}{1-2}, \frac{1\times0-2\times3}{1-2}\right)$, 즉 $(-2, 6)$

따라서 구하는 직선은 기울기가 1 이고

점 $(-2,\ 6)$ 을 지나므로

$y - 6 = 1 \cdot (x + 2),\ \ y = x + 8$

$a = 1,\ b = 8 \quad \therefore a + b = 9$

9. 직선 $y = -ax+2$가 직선 $y = bx+3$과 수직이고, 직선 $y = (b+3)x-1$과는 평행하다. 이 때, $a+b+ab$의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

해설

수직조건에서 $ab = 1$이고,
평행조건에서 $a+b = -3$이다.
$\therefore\ a+b+ab = -2$

10. 직선 $y = 2x + 4$ 를 x 축을 따라 α 만큼 평행이동시킨 직선을 l, l 을 x 축에 대하여 대칭이동시킨 직선을 m, m 을 y 축에 대하여 대칭이동시킨 직선을 n 이라고 할 때, 직선 l 이 n 과 일치하도록 상수 α 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

직선 $y = 2x + 4$ 를 x 축 방향으로 α 만큼
평행이동시킨 직선 l 은
l : $y = 2(x - \alpha) + 4$
이것을 x 축에 대하여 대칭이동시킨 직선 m 은
m : $(-y) = 2(x - \alpha) + 4$
n 은 m 을 y 축에 대하여 대칭이동시킨 것이므로
n : $(-y) = 2(-x - \alpha) + 4$
이것을 정리하면 $y = 2x + 2\alpha - 4$ 이므로
l 과 n이 일치하려면
$-2\alpha + 4 = 2\alpha - 4$ 가 되어 $\alpha = 2$ 이다.

11. 이차부등식 $ax^2+bx+c>0$을 만족하는 x의 범위가 $-2<x<1$일 때, 부등식 $cx^2-ax+b<0$을 만족하는 x의 범위는?

① $-2<x<1$ ② $-1<x<\frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}<x<2$
④ $\frac{1}{2}<x<1$ ⑤ $\frac{1}{2}<x<2$

해설

$ax^2+bx+c>0$의 해가 $-2<x<1$이므로

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}<0(a<0)$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-1)=x^2+x-2<0$

$\therefore\ \frac{b}{a}=1, \frac{c}{a}=-2$

$cx^2-ax+b<0$에서

양변을 a로 나누면

$\frac{c}{a}x^2-x+\frac{b}{a}>0 \Leftrightarrow -2x^2-x+1>0$

$2x^2+x-1<0, (2x-1)(x+1)<0$

$\therefore\ -1<x<\frac{1}{2}$

12. 점 $\mathrm{P}(a,b)$가 직선 $y=3x+2(-1\le x\le 2)$ 위를 움직일 때, 점 $\mathrm{Q}(a+b,a-b)$가 나타내는 자취의 길이는?

① $2\sqrt{5}$ ② $3\sqrt{5}$ ③ $4\sqrt{5}$ ④ $5\sqrt{5}$ ⑤ $6\sqrt{5}$

해설

점 $\mathrm{P}(a,b)$가 직선 $y=3x+2$ 위의 점이므로
$b=3a+2$(단, $-1\le a\le 2$) $\cdots$ ㉠
이 때, 점 $\mathrm{Q}(a+b,a-b)$에서
$a+b=X,\ a-b=Y$로 놓고
a,b를 X,Y로 나타내면
$a=\dfrac{X+Y}{2},\ b=\dfrac{X-Y}{2}$
이것을 ㉠에 대입하면
$\dfrac{X-Y}{2}=\dfrac{3X+3Y}{2}+2$
$\therefore X+2Y+2=0$
한편, $X=a+b=a+(3a+2)=4a+2$이고
$-1\le a\le 2$이므로 $-2\le 4a+2\le 10$
$\therefore -2\le X\le 10$
따라서 점 $\mathrm{Q}(x,y)$는
직선 $x+2y+2=0$ (단, $-2\le x\le 10$) 위를 움직인다.
그런데 $x=-2$일 때, $y=0$
$x=10$일 때, $y=-6$이므로
구하는 자취의 길이는 두 점 $(-2,0),(10,-6)$을 이은 선분의 길이와 같다.
$\therefore \sqrt{(10+2)^2+(-6)^2}=\sqrt{180}=6\sqrt{5}$

13. 원 $x^2 + y^2 = 5$ 위의 점 P 에서의 접선이 점 $(3,\ 1)$을 지날 때, 점 P 의 좌표를 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$라 할 때, $a + b + c + d$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

접점을 (x_1, y_1)이라 하면 접선은
$x_1 x + y_1 y = 5 \cdots$ ①
이것이 점 $(3, 1)$을 지나므로
$3x_1 + y_1 = 5 \cdots$ ②
또, (x_1, y_1)은 $x^2 + y^2 = 5$
위의 점이므로 $x_1^2 + y_1^2 = 5 \cdots$ ③
② 에서 $y_1 = 5 - 3x_1$ 을 ③에 대입하면
$x_1^2 + (5 - 3x_1)^2 - 5 = 0$,
$10x_1^2 - 30x_1 + 20 = 0$
$10(x_1 - 1)(x_1 - 2) = 0$
$\therefore x_1 = 1$이면 $y_1 = 2$, $x_1 = 2$이면 $y_1 = -1$
$\therefore$ 접점은 $(1, 2), (2, -1)$

14. $a+b=1$ 이고 $a^2+b^2=-1$ 일 때, $a^{2005}+b^{2005}$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$b=1-a$ 를 a^2+b^2 에 대입하여 정리하면

$a^2-a+1=0$ $(a+1)(a^2-a+1)=0$

$a^3+1=0$ $\therefore$ $a^3=-1$

마찬가지 방법으로 $b^3=-1$

$a^{2005}+b^{2005}=(a^3)^{668}\cdot a+(b^3)^{668}\cdot b=a+b=1$

해설

a^3, b^3 의 값을 다음과 같이 구해도 된다.

$a^2-a+1=0$ 에서 $a^2=a-1$

$a^3=a^2\cdot a=(a-1)\cdot a=a^2-a=-1$

마찬가지 방법으로 $b^3=-1$

15. $x = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}, y = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, 다음 중에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ $x^5 + y^5 = -1$	㉡ $x^9 + y^9 = -1$
㉢ $x^{11} + y^{11} = -1$	

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

$x = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}, y = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

각각 양변에 2을 곱하고 -1을 이항한 후 양변을 제곱하여 정리하면

$x^2 + x + 1 = 0, y^2 + y + 1 = 0$

$x^2 = -x - 1 \cdots$ ①

①의 양변에 x 를 곱하면

$x^3 = -x^2 - x = -(x^2 + x) = 1$ ($\because$ $x^2 + x = -1$)

$x^3 = 1$, y 에 대해서도 마찬가지로 하면 $y^3 = 1$

또한 $x + y = -1, xy = 1$

㉠ $x^5 + y^5 = x^3 \cdot x^2 + y^3 \cdot y^2$
$= x^2 + y^2$
$= (x+y)^2 - 2xy$
$= -1$

㉡ $x^9 + y^9 = (x^3)^3 + (y^3)^3$
$= 1 + 1$
$= 2$

㉢ $x^{11} + y^{11} = (x^3)^3 \times x^2 + (y^3)^3 \times y^2$
$= x^2 + y^2$
$= -1$

※다음과 같은 과정으로 필요한 값을 얻을 수 있다.

$x^2 + x + 1 = 0, y^2 + y + 1 = 0$ 에서

각각 양변에 $x - 1, y - 1$ 을 곱하면

$(x-1)(x^2+x+1) = 0, (y-1)(y^2+y+1) = 0$

$x^3 - 1 = 0, y^3 - 1 = 0$

$\therefore$ $x^3 = y^3 = 1$

해설

이차방정식의 근과 계수와의 관계를 이용할 수도 있다.

x 와 y 를 X 에 대한 이차방정식의 두 근이라고 한다면 $x + y = -1,\ xy = 1$ 이므로

$X^2 + X + 1 = 0 \Rightarrow X^3 = 1 \therefore$ $x^3 = 1,\ y^3 = 1$